BAHAN AJAR

“STATISTIKA MATEMATIKA I”

DISUSUN OLEH:

NUR FITRYAH INDRASWARI

NIDN. 0718049201

PROGRAM PENDIDIKAN MATEMATIKA

STKIP PGRI SUMENEP

TAHUN 2023

PRAKATA

Puji syukur kita panjatkan kepada Allah SWT. Berkat karunia- Nya, buku perkuliahan **Statistika Matematika I** ini bisa hadir sebagai salah satu *supporting system* penyelenggaraan program S-1 Prodi Pendidikan Matematika di STKIP PGRI Sumenep.

Diktat bahan ajar **Statistika Matematika I** ini penulis tulis untuk membantu perkuliahan mata kuliah **Statistika Matematika I** agar mahasiswa dapat memahami dan memperdalam materi dengan mudah dan cepat. Diktat buku ajar ini terdiri dari materi beserta contoh soal dan dilengkapi dengan latihan-latihan soal. Untuk pengembangan materi, mahasiswa diharapkan untuk membaca buku dari sumber-sumber lain sehingga pencapaian keberhasilan pemahaman akan lebih berhasil.

Akhirnya, kami mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada *STKIP PGRI Sumenep* yang telah memberi *support* penyusunan buku ini, kepada semua pihak yang telah turut membantu dan berpartisipasi demi tersusunnya buku perkuliahan **Statistika Matematika I** ini. Kritik dan saran dari para pengguna dan pembaca kami tunggu guna penyempurnaan buku ini.

Terima Kasih.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

KOMBINATORIKA

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami Kombinatorik dan menerapkannya dalam menyelesaikan permasalahan.

- **Indikator** :

  1. Menerapkan konsep faktorial dalam menyelesaikan suatu masalah
  2. Memahami konsep dasar permutasi dan penggunaannya dalam penyelesaian masalah
  3. Memahami perbedaan permutasi dan permutasi dengan pengulangan dalam menyelesaikan suatu masalah
  4. Memahami perbedaan dan hubungan antara permutasi dengan kombinasi.
  5. Menerapkan konsep kombinasi dalam pemecahan suatu masalah
  6. Memahami dan menerapkan konsep koefisien binomial

Sebelum mempelajarai konsep dasar probabilitas, kita pelajari dulu analisis kombinatorial yang akan sangat membantu dan banyak digunakan dalam konsep dasar probabilitas, yaitu analisis bilangan faktorial, permutasi, kombinasi, dan koefisien binomial..

A. Bilangan Faktorial

Definisi 1.1

Bila n bilangan bulat positif, maka bilangan faktorial ditulis dengan n! dan didefinisikan sebagai berikut.

$$\boxed{\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2\ 1}}$$

Contoh:

a. $4! = 4(4-1)(4-2)(4-3) = 4.3.2.1 = 24$

b. $6! = 6(6-1)(6-2)! = 6.5.4! = 30.24 = 720$

c. $\frac{7!\times 5!}{8!} = \frac{7!\times 5!}{8\times 7!} = \frac{5!}{8} = \frac{120}{8} = 15$

d. $\frac{17!}{15!} = \frac{17.16.15!}{15!} = 17.16 = 272$

Berdasarkan contoh di atas terlihat bahwa semakin besar bilangan n, maka bilangan faktorial n! membesar dengan cepat.

B. Permutasi

Definisi 1.2:

Misal S dalah himpunan n obyek berbeda

Sebuah permutasi-k dari S adalah sebuah jajaran terurut dari k objek di S.

Contoh:

$S = \{1,2,3\}$

Daftar semua permutasi-2 dari S tanpa pengulangan.

Penyelesaian:

12, 21, 13, 31, 23, 32

Kita peroleh sebanyak 6 susunan.

Jenis susunan 12 berbeda dengan jenis susunan 21 sebab pada susunan pertama 2 terletak diurutan kedua dan pada susunan kedua 2 terletak diurutan pertama. Demikian juga jenis susunan 13 berbeda dengan jenis susunan 31 sebab pada susunan pertama 1 terletak diurutan pertama dan pada susunan kedua 1 terletak diurutan kedua.

Teorema 1.1

Jika $n.k \in \mathbb{Z}^+$ dengan $k \leq n$, maka

$$\boldsymbol{P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Bukti:

Misalkan S himpunan dengan n unsur berbeda membentuk suatu permutasi-k dari objek S tanpa pengulangan.

Prosedur dapat dipecah menjadi *k* tugas yang saling bebas, dinamakan $T_1, T_2, \ldots, T_k$

T_1 : Memilih sebuah elemen S untuk diletakkan di posisi pertama
T_1 dapat dilakukan dengan *n* cara

T_2 : Memilih sebuah elemen S untuk dietakkan di posisi kedua dengan syarat elemen trsebut berbeda dengan elemen pada posisi pertama
T_2 dapat dilakukan dengan $(n-1)$ cara

T_3 : Memilih sebuah elemen S untuk dietakkan di posisi ketiga dengan syarat elemen tersebut berbeda dengan elemen pada posisi pertama dan kedua

T_2 dapat dilakukan dengan $(n-2)$ cara

.

.

T_k : Memilih sebuah elemen S untuk dietakkan di posisi ke-*k* dengan syarat elemen tersebut berbeda dengan elemen pada posisi-posisi sebelumnya

T_k dapat dilakukan dengan $(n-(k-1))$ cara

Berdasarkan aturan perkalian, prosedur dapa dilakukan dengan $(n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(k-1))$ cara.

Dengan demikian:

$$P(n,k) = (n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(k-1))$$

$$P(n,k) = (n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

$$P(n,k) = \frac{(n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \ldots . \times 3 \times 2 \times 1}{(n-k) \times \ldots . \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dengan demikian, teorema 1.1 terbukti.

Teorema 1.2

Ada n! permutasi dari n obyek

Bukti:

P(n,r) jika n = r maka berlaku:

P(n,r) = $\frac{n!}{(n-r)!}$

P(n,n) = $\frac{n!}{(n-n)!}$

P(n,n) = $\frac{n!}{0!}$ karena 0! = 1, maka terbukti ada n! permutasi dari n obyek, atau bisa ditulis

P(n,n) = n!

Contoh:

Berapakah permutasi dari 3 obyek?

Misal 3 obyek itu adalah *a*, *b*, dan *c* . maka P(3,3) = 3! = 6 (susunan *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, dan *cba*)

Contoh Soal:

1. Jika n= 4 dan r = 2 maka

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 4.3 = 12$$

2. Jika n= 8 dan r = 2 maka

$$P(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$$

3. Perhatikan himpunan {a, b, c}, di mana n = 3.
   a. Jika diambil r = 2, maka banyaknya susunan yang diperoleh adalah

   $$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3.2.1 = 6$$

   Susunannya yaitu ab, ba, ac, ca, bc, cb

   b. Jika diambil r = 3, maka banyaknya susunan yang diperoleh adalah

   $$P(3,2) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3.2.1 = 6$$

   Susunannya yaitu abc, acb, bca, bac, cab, cba

4. Diketahui 3 buah buku akuntansi berbeda dan 2 buku ekonomi berbeda akan disusun berjajar dalam sebuah rak. Tentukan banyaknya susunan yang dapat dibentuk dari buku-buku tersebut jika:
   a. Setiap buku boleh berada di posisi mana saja!
   b. Buku-buku yang sejenis harus berdekatan!

   Penyelesaian:

   a. P (5,5) = $\frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 120$ susunan

   b. Dalam kasus ini ada 2buah jenis buku (ekonomi dan akuntansi) sehingga dari 2 buah jenis buku itu dapat dipermutasikan menjadi P (2,2) = $\frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = 2$. Buku akuntansi terdiri dari 3 buah buku yang berbeda misal A_1, A_2, dan A_3, sehingga masing – masing buku akuntansi tersebut dapat berpermutasi P (3,3) = 6.sedangkan buku ekonomi ada 2 buah buku missal E_1, dan E_2. sehingga masing – masing buku ekonomi tersebut dapat berpermutasi P (2,2) = 2. Maka banyaknya susunan buku dalam rak tersebut adalah = 2 x 6 x 2 = 24 susunan.

1. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Teorema 1.3

Bila kita mempunyai himpunan yang terdiri atas n anggota, maka ada kemungkinan sebagian dari anggotanya mempunyai jenis yang sama. Katakanlah jenis 1 terdiri atas n_1 yang sama, jenis 2 terdiri dari n_2 yang sama, jenis 3 terdiri dari n_3 yang sama, ..., jenis k terdiri dari n_k yang sama, maka banyaknya permutasi yang dapat dibuat adalah :

$$\binom{n}{n_1, n_{2,} n_3, \dots., n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots n_k!}$$

Di mana $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$

Contoh:

Berapa banyak susunan yang dapat dibuat dari kata “TURUNAN”

Penyelesaian:

Semunya ada n = 7 huruf, yang terdiri atas:

Jenis 1, huruf T, yang banyaknya adalah $n_1 = 1$

Jenis 2, huruf U, yang banyaknya adalah $n_2 = 2$

Jenis 3, huruf R, yang banyaknya adalah $n_3 = 1$

Jenis 4, huruf N, yang banyaknya adalah $n_4 = 2$

Jenis 5, huruf A, yang banyaknya adalah $n_5 = 1$

Jadi, banyaknya permutasi yang dapat dibuat adalah:

$$\binom{7}{1,2,1,2,1} = \frac{7!}{1!\,2!\,1!\,2!\,1!} = \frac{7.6.5.4.3.\cancel{2!}}{1!\,2!\,1!\,\cancel{2!}\,1!} = 1260\ cara$$

2. Permutasi Siklis

Permutasi siklis adalah suatu permutasi yang dibuat dengan menyusun anggota-anggota suatu himpunan secara melingkar. Dua permutasi melingkar dianggap sama bila didapatkan dua himpunan permutasi yang sama dengan cara beranjak dari suatu anggota tertentu dan bergerak searah jarum jam. Banyaknya permutasi dari n anggota yang disusun secara melingkar sebagai berikut.

Banyaknya Permutasi = (n – 1)!

Contoh:

Berapakah banyaknya cara 8 orang dapat duduk mengelilingi api unggun jika 2 orang tertentu harus selalu berdampingan?

Penyelesaian:

Banyaknya orang ada 8 tetapi dua orang tertentuharus selalu berdampingan (dihitung satu) sehingga banyaknya orang ada 7.

Permutasi siklis 7 orang = P = (n – 1)! = (7 – 1)! = 6!

Dua orang berdampingan dapat bertukar posisi sebanyak 2!.

Banyaknya cara = 6! × 2! $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 1.440$

Jadi, banyaknya cara 8 orang dapat duduk mengelilingi api unggun dengan cara tersebut ada 1.440 cara.

C. Kombinasi

Jajaran dari n obyek yang urutannya tidak diperhatikan.

Misal S adalah sebuah himpunan n obyek berbeda.

Sebuah kombinasi-k dari S adalah sebuah jajaran tak terurut dari k objek di S; dengan perkataan lain. Sebuah himpunan bagian dari S dengan k elemen.

$C(n,k)$ menyatakan banyak kombinasi-k dari n obyek berbeda tanpa pengulangan.

Contoh:

$S = \{1,2,3\}$

Daftar semua kombinasi-2 dari S tanpa pengulangan.

Penyelesaian:

12, 13, 23

Kita peroleh sebanyak 3 susunan.

Jenis susunan 12 sama dengan jenis susunan 21 sebab pada susunan tidak memperhatikan urutan. Demikian juga jenis susunan 13 sama dengan jenis susunan 31 sebab 13 dan 31 dianggap 1 susunan karena urutan tidak diperhatikan.

Teorema 1.4

Jika $k, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\ dari\ k \leq n, maka$

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$Bukti$:

Misal S adalah n obyek berbeda.

Pikirkan sebuah kombinasi-k dari n obyek berbeda di S tanpa pengulangan.

Ada sebanyak C(n, k) kombinasi-k yang seperti itu. Dari setiap kombinasi k tersebut dapat dibentuk sebanyak P(k, k) permutasi-k dari S tanpa pengulangan. Padahal ada sebanyak P(n,k) permutasi-k dari S tanpa pengulangan. Akibatnya, berdasarkan aturan perkalian diperoleh C(n,k) . P(k,k) = P(n,k)

Atau $C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)}$

Berdasarkan teorema 1.3 diperoleh:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)} = \frac{n!}{(n-k)!} : \frac{k!}{(k-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dengan demikian teorema 1.4 terbukti.

Contoh:

1. Nilai $C(8{,}5) = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8.7.\cancel{6.5!}}{\cancel{5!3.2.1}} = 8.7 = 56$
2. Dalam sebuah kotak terdapat 3 bola yang masing-masing berwarna merah, hijau dan biru. Seorang anak ditugaskan untuk mengambil 2 bola dengan pengambilan bola, urutan tidak diperhatikan artinya tidak diizinkan tentang urutan. Ada berapa banyak cara yang dapa dilakukan?

   Penyelesaian:

   Oleh karena urutan tidak diperhatika sehingga merupakan kombinasi.

   Banyak bola = 3, sehingga n = 3.

   Banyak bola yang diambil ada 2, sehingga r = 2.

   $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

   Jadi, banyak cara yang dapat dilakukan anak tersebut untukmengambil 2 bola adalah 3 cara.

   Teorema 1.5:

   $$\boxed{\mathbf{C^{n}_{n-r} = C^{n}_{r}}}$$

   Bukti:

   $$C^{n}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\big(n-(n-r)\big)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = C^{n}_{r}$$

   Contoh:

   $$C^{7}_{2} = C^{7}_{5}$$

   $$\frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!}$$

$$\frac{7!}{2!\,(5)!} = \frac{7!}{5!\,(2)!}$$

Teorema 1.6: (buktikan sebagai latihan)

$$\boxed{\mathbf{C_r^{n+1} = C_{r-1}^{n} + C_r^{n}}}$$

Contoh:

C(8,6) = C(7,5) + C(7,6)

$$\frac{8!}{6!2!} = \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!}$$

$$\frac{8.7.6!}{6!.2} = \frac{7.6.5!}{5!.2} + \frac{7.6!}{6!.1}$$

28 = 21+ 7

D. Koefisien Binomial

Teorema Binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\ a^{n-r}\ b^r$$

$$= C(n,0)\ a^{n-0}\ b^0 + C(n,1)\ a^{n-1}\ b^1 + C(n,2)\ a^{n-2}\ b^2 + \ldots\ldots + C(n,n-1)\ a^{n-(n-1)}\ b^{(n-1)} + C(n,n)\ a^{n-n}\ b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}\ a^{n-2}\ b^2 + \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n\,(n-1)}{2!}\ a^{n-2}\ b^2 + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{3!}\ a^{n-3}\ b^3 + \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\ a^{n-4}\ b^4 \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Contoh:

1. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5.4}{2.1}\ a^3b^2 + \frac{5.4}{2.1}\ a^2b^3 + 5\ ab^4 + b^5$
2. $(p + q)^6 = P^6 + 6P^5q + \frac{6.5}{2.1}\ P^4q^2 + \frac{6.5.4}{3.2.1}\ p^3q^3 + \frac{6.5}{2.1}\ p^2q^4 + 6\ Pq^5 + q^6$

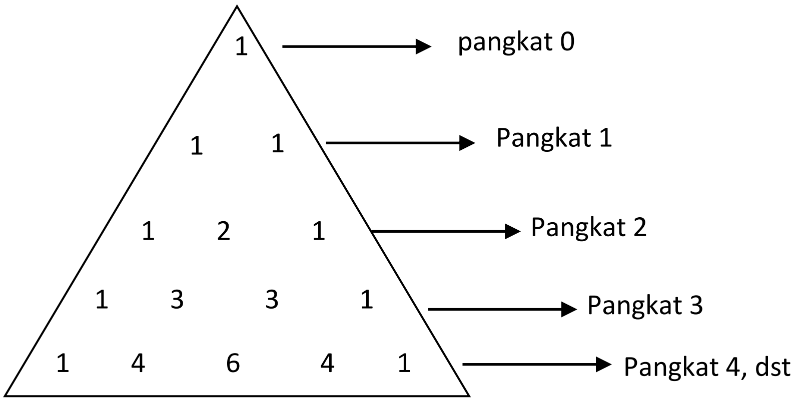
   $= P^6 + 6P^5q + 15\ P^4q^2 + 20\ p^3q^3 + 15\ p^2q^4 + 6\ Pq^5 + q^6$

Bila $(a + b)^n$ ditulis sebagai suku banyak (diekspansikan), maka sifat-sifat berikut perlu diperhatikan:

1. Ada (n + 1) suku
2. Jumlah pangkat dari a dan b tiap suku adalah n
3. Pangkat dari a suku demi suku turun satu demi satu dari n ke 0
4. Pangkat dari b suku demi suku naik satu demi satu dari 0 ke n
5. Koefisien dari sebarang suku adalah C(n,k) dimana k adalah pangkat dari a atau pangkat dari b

6. Koefisien dari suku yang berjarak sama dari a^n dan b^n adalah sama.

Jika koefisien-koefisiennya disusun dalam bentuk segitiga, maka susunan segitiga tersebut dinamakan ***"Segitiga Pascal"***



Segitiga pascal memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Bilangan pertama dan terakhir dalam tiap baris adalah 1
2. Tiap bilangan selain 1, dapat dicari dengan menunjukkan 2 bilangan yang terletak tepat diatasnya. Misal 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3

   Contoh: ekspansikan dan sederhanakan $(2x + y)^5$

   Penyelesaian:

   Misal a = 2x, b = y

   $(2x + y)^5 = (a + b)^5$

   $= \mathbf{1.}a^5 + \mathbf{5}\ a^4b + \mathbf{10}\ a^3b^2 + \mathbf{10}\ a^2b^3 + \mathbf{5}\ ab^4 + \mathbf{1}\ b^5$

   $= (2x)^5 + 5(2x)^4(y) + 10\ (2x)^3\ (y)^2 + 10\ (2x)^2(y)^3 + 5(2x)(y)^4 + (y)^5$

   $= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

UJI KOMPETENSI BAB I

1. Tentukan hasil dari soal berikut.
   a. $\frac{13!}{9!3!}$
   b. $\frac{5!}{7!}$
   c. $\frac{6!4!}{8!}$
   d. $\frac{6!}{4!}+\frac{8!}{6!2!}$
   e. $\frac{10!}{8!3!}-2\frac{5!}{4!}$
2. Pada sebuah pesta, dalam berapa cara 7 orang dapat duduk dalam satu baris dengan 7 kursi!
3. a. Dalam berapa cara 3 pria dan 2 wanita dapat duduk dalam 1 baris!
   b. Ada berapa cara bagi mereka untuk dapat duduk dalam suatu baris jika ketiga pria dan kedua wanita tersebut masing-masing duduk berdampingan!
4. Hitunglah nilai n pada persamaan C_3^n=7n
5. Tentukan banyaknya susunan kata yang dapat dibuat dari kata "PROBABILITAS".
6. Kelompok belajar yang terdiri dari 6 orang akan dipisahkan menjadi 2 grup. Berapa banyak cara untuk membentuk grup itu, jika disyaratkan:
   1. Grup pertama terdiri dari 4 orang dan grup kedua terdiri dari 2 orang?
   2. Masing-masing grup terdiri dari 3 orang?
7. Dalam pelatnas nasional bulu tangkis ada 8 orang pemain putra dan 6 orang pemain putri. Berapa banyak pasangan ganda yang dapat dibentuk untuk:
   1. Ganda putra?
   2. Ganda putri?
   3. Ganda campuran?
8. Dari kelompok ahli ada 5 orang sarjana ekonomi dan 7 sarjana hukum. Akan dibuat tim kerja yang terdiri atas dua sarjana ekonomi dan 3 sarjana hukum. Berapa banyak cara untuk membuat tim itu, jika:
   a. Tiap orang dapat dipilih secara bebas;
   b. Seorang sarjana hukum harus ikut dalam tim itu;
   c. Dua orang sarjana ekonomi tidak boleh ikut dalam tim itu.
9. Tentukan koefisien x^7y^3 dari $(2x-y)^{10}$.
10. Buktikan teorema binomial $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, a^{n-r}\, b^r$ dengan induksi matematika.

BAB II

PROBABILITAS

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami konsep dasar probabilitas dan menerapkannnya dalam menyelesaikan masalah.

- **Indikator** :

  1. Memahami dan menjelaskan pengertian peluang.
  2. Menjelaskan istilah-istilah terkait peluang, misalkan ruang sampel, pecobaan, kejadian, titik sampel.
  3. Memberikan contoh hal-hal yang berkaitan dengan peluang dalam kehidupan
  4. Menjelaskan definisi peluang
  5. Memahami dan menjelaskan teorema-teorema dasar yang berkaitan dengan peluang.
  6. Menerapkan teorema-teorema terkait peluang dalam menyelesaikan permasalahan.

A. Pengantar Menuju Pemahaman Konsep Probabilitas

Banyak kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang sulit diketahui dengan pasti, apalagi kejadian di masa yang akan datang. Begitu juga dalam percobaan statistika, kita tidak bisa mengetahui dengan pasti hasil-hasil yang akan muncul, misalnya:

1. Pada pelemparan sebuah uang logam, kita tidak tahu dengan pasti hasilnya, apakah yang akan muncul sisi muka atau sisi belakang dari uang logam itu;
2. Pada pelemparan sebuah dadu, kita tidak tahu dengan pasti hasilnya, apakah yang akan muncul sisi muka dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6; dan
3. Pada penarikan sebuah kartu bridge dalam kotak yang berisi 52 kartu, kita juga tidak tahu dengan pasti, apakah yang akan muncul kartu As, king, atau yang lain.

Meskipun kejadian-kejadian tersebut tidak pasti, tetapi kita bisa melihat fakta-fakta yang ada untuk menuju derajat kepastian atau derajat keyakinan bahwa sesuatu akan terjadi. Sebagai contoh, pada pelemparan secara acak sebuah dadu, tanpa rekayasa apa-apa, maka ada derajat kepastian bahwa muka 3 dari dadu itu akan muncul.

Definisi 2.1

Derajat/tingkat kepastian atau keyakinan dari munculnya hasil percobaan statistik disebut probabilitas atau peluang. Suatu probabilitas dilambangkan dengan P.

Istilah-istilah dalam peluang:

a. Ruang Sampel : himpunan S dari semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen yang diberikan
b. Sampel (titik sampel) : suatu hasil yang khusus, yaitu suatu elemen dalam S.
c. Kejadian : suatu himpuan bagian dari ruang sampel S
d. Kejadian {a} yang terdiri atas suatu titik sampel tunggal a ϵ S disebut suatu kejadian yang elementer
e. Himpunan kosong (∅) sering disebut sebagai kejadian yang tidak mungkin terjadi, sedangkan S merupakan kejadian yang pasti terjadi.

   Contoh:

   Eksperimen: melambungkan sebuah dadu 1 kali dan dilihat banyaknya mata dadu yang tampak

   Ruang sampel: S = {1,2,3,4,5,6}

   Titik sampel : 1, atau 2, atau 3, atau 4, atau 5 atau 6

   Kejadian : misalkan A = kejadian muncul mata dadu genap

   A = {2,4,6}

   B = kejadian muncul mata dadu ganjil

   B = {1,3,5}

Ada suatu keterkaitan antara kejadian A dan ruang sampel S pada kosep probabilitas dengan himpunan bagian A dan himpunan semesta S pada teori himpunan, yaitu sebagai berikut.

Konsep Probabilitas		**Teori Himpunan**
Ruang Sampel S	$\longleftrightarrow$	Himpunan Semesta S
Kejadian A	$\longleftrightarrow$	Himpunan Bagian A
Titik Sampel	$\longleftrightarrow$	Anggota himpunan

Berdasarkan kejadian A dan ruang sampel S tersebut, maka perumusan konsep probabilitas didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2

Bila kejadian A terjadi dalam m cara pada ruang sampel S yang tercadi dalam n cara, maka probabilitas kejadian A adalah ...

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}}}$$

Contoh:

Tentukan peluang munculnya kejadian muncul mata dadu prima pada pelemparan sebuah dadu.

Penyelesaian:

Misal A = kejadian munculnya mata dadu prima = {2, 3, 5}

n(A) = 3

S = {1,2,3,4,5,6}, n(S) = 6

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B. Sifat-Sifat Probabilitas Kejadian A

1. Sifat 1 : 0 < P(A) < 1
2. Sifat 2 : Jika A = ∅ , maka n(A) = 0, sehingga

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n} = 0$$

3. Sifat 3 : Jika A = S, maka n(A) = n(S) = n

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{n} = 1$$

Berdasarkan ketiga sifat di atas, dapat diperoleh sifat:

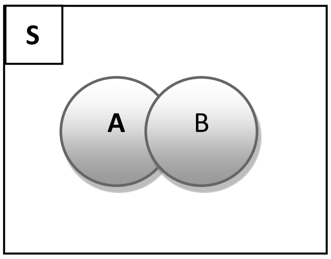
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Dalam hal P(A) = 0, dikatakan A kejadian yang *mustahil terjadi* dan dalam hal P(A) = 1 dikatakan A kejadian yang *pasti terjadi*

C. Kejadian Majemuk

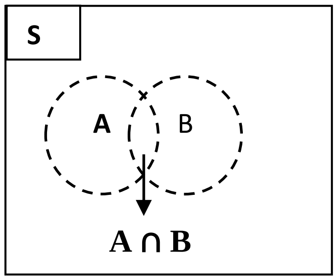
Definisi 2.3:

1. A ∪ B merupakan kejadian atau peristiwa yang terjadi jika kejadian A terjadi *atau* B terjadi *atau* keduanya terjadi.



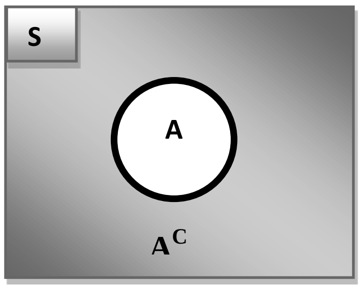
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2. A ∩ B merupakan kejadian atau peristiwa yang terjadi jika kejadian A terjadi *dan* B terjadi.



$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

3. A^C (yaitu komplemen dari A) adalah kejadian yang terjadi jika A tidak terjadi.



$$n(A^c) = 1 - n(A)$$

HUKUM DE MORGAN

a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Contoh:

Eksperimen: melambungkan sebuah dadu 1 kali dan dilihat banyaknya mata dadu yang tampak

Ruang sampel: S = {1,2,3,4,5,6}

Misalkan: A = kejadian muncul mata dadu genap = {2,4,6}
B = kejadian muncul mata dadu prima= {2,3,5}
C = kejadian muncul mata dadu ganjil = {1,3,5}

Jika P = kejadian muncul mata dadu ganjil *atau* prima

$$P = B \cup C = \{1,2,3,5\}$$

Jika Q = kejadian muncul mata dadu ganjil *dan* prima

$$Q = B \cap C = \{3,5\}$$

Jika R = kejadian tidak muncul mata dadu prima

$$R = C^C = \{2,3,5\}^C = \{1,4,6\}$$

D. Probabilitas

<u>Definisi 2.4:</u>

Dua peristiwa A dan B yang tidak mempunyai elemen yang berserikat, yaitu $A \cap B = \emptyset$ dinamakan dua peristiwa yang saling asing (atau "***disjoint***").

Contoh *:*

Jika dua buah dadu dilambungkan satu kali, dan dilihat pasangan mata yang muncul/tampak.

A = kejadian bahwa jumlah mata yang muncul 8

B = kejadian bahwa jumlah mata yang muncul kurang dari 5

Maka: A = {(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)} B= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (2,2), (1,3)}

$A \cap B = \emptyset$

Jadi kejadian A dan B saling asing/disjoint.

<u>Definisi 2.5:</u>

Misal S adalah ruang sampel dan A adalah sebarang kejadian dalam S. Maka P disebut fungsi probabilitas pada ruang sampel S apabila dipenuhi aksioma-aksioma berikut.

(***Aksioma 1***) .: Untuk setiap kejadian A, $0 \leq P(A) \leq 1$

(***Aksioma 2***) : P(S) .= 1

(***Aksioma 3***) : Jika A dan B dua kejadian yang *saling asing* maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(***Aksioma 4***) : Jika A_1, A_2, … ,merupakan deretan kejadian yang saling asing maka:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Contoh :

Jika dua buah dadu dilambungkan satu kali, dan dilihat pasangan mata yang muncul/tampak.

A = kejadian bahwa jumlah mata yang muncul 8

B = kejadian bahwa jumlah mata yang muncul kurang dari 5

A = {(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)}; n(A) = 5; P(A) = $\frac{5}{36}$

$B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (2,2), (1,3)\}$; $n(B) = 6$; $P(B) = \frac{6}{36}$

Karena A dan B saling asing ($A \cap B = \emptyset$), maka: menurut ***aksioma 3 (A_3)***,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$

***Teorema 2.1* : p(∅) = 0**

Bukti:

Misalkan A sebarang kejadian (himpunan bagian dari S) maka $A \cup \emptyset = A$

Dengan aksioma (A_3), $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

Jadi $P(A) = P(A) + P(\emptyset)$

Kedua ruas dikurangi dengan P(A), didapatkan $P(\emptyset) = 0$

Teorema 2.2 : $P(A^C) = 1 - P(A)$

$S = A \cup A^c$; dimana A dan A^c saling asing

Dari (A_2) : $P(S) = 1$

Karena $S = A \cup A^c$, maka menurut aksioma (A_3)

$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ atau

$1 = P(A) + P(A^c)$

Jadi $P(A^c) = 1 – P(A)$

Contoh :

Satu dadu yang setimbang dilambungkan satu kali, dilihat banyak mata yang muncul.

A = kejadian bahwa muncul mata prima.

$A = \{2, 3, 5\}$ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

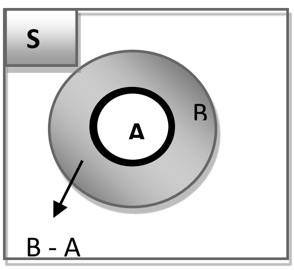
A^C kejadian muncul mata tidak prima, sehingga $A^C = \{1, 4, 6\}$ dan $P(A^C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Atau dengan menggunakan teorema 2: $P(A^c) = 1 – P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

<u>Teorema 2.3:</u>

Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$

Bukti:



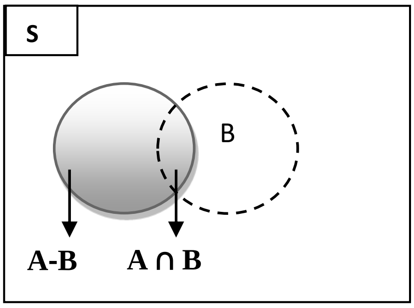
- Jika $A \subset B$, maka B dapat dinyatakan sebagai 2 kejadian yaitu A dan B-A yang saling asing.

B = A ∪ (B-A) sehingga P(B) = P(A)+P(B-A), menurut aksioma 1(A_1): 0 ≤ P(B-A) ≤ 1. Maka berarti P(B) ≥ P(A) atau P(A) ≤ P(B)

Teorema 2.4:

Jika A dan B dua buah kejadian, maka P(A-B) = P(A) – P(A∩B)

Bukti:



A dapat dinyatakan kedalam 2 kejadian yang saling asing yaitu A-B dan A∩B. atau

A= (A-B) ∪ (A∩B) sehinggasesuai dengan aksioma 3 maka:

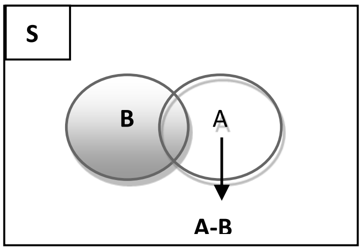
P(A) = P(A-B) + P(A∩B) atau

P(A-B) = P(A) – P(A∩B)

Teorema 2.5 :

Jika A dan B sebarang dua kejadian, maka P(A∪B) = P(A) + P(B)– P(A∩B)

Bukti:



A∪B dapat dinyatakan dengan 2 kejadian yang saling asing yaitu A-B dan B, atau

A∪B = (A-B) ∪ B, dengan aksioma 3 (A_3), didapat:

P(A∪B) = P(A-B) + P(B)

= (P(A) – P(A∩B)) + P(B) (teorema 4)

= P(A) + P(B)– P(A∩B)

maka P(A∪B) = P(A) + P(B)– P(A∩B)

Teorema 6 (Teorema Akibat):

Untuk sebarang 3 buah kejadian A, B, dan C berlaku:

P(A∪B∪C) = P(A) + P(B) + P(C)– P(A∩B) - P(A∩C) - P(B∩C) + P(A∩B∩C)

Contoh:

Melambungkan sebuah dadu 1 kali dan dilihat banyaknya mata dadu yang tampak

Misalkan

A = kejadian muncul mata dadu genap = {2,4,6} P(A) = $\frac{1}{2}$

B = kejadian muncul mata dadu prima= {2,3,5}, P(B) = $\frac{1}{2}$

A∩B = kejadian muncul mata dadu genap dan prima = {2}, P(A∩B) = $\frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Definisi 2.6:

Misalkan S ruang sampel , S={a_1, a_2, a_3……, a_n} dan misalkan pula bahwa P_1, P_2,P_3,… P_n adalah bilangan-bilangan tak negatif yang jumlahnya sama dengan 1, atau P_1+P_2P+… +P_n = 1. Untuk kejadian A, peluangnya didefinisikan sebagai P(A) = jumlah semua P_1 yang berkaitan dengan hasi a_1, dengan a_1 didalam a.

Contoh:

Sebuah dadu yang tidak setimbang (dadu yang jika dilambungkan peluang munculnya tiap sisi tidak sama) dilambungkan berulang-ulang dapat frekuensi direlatif sebagai berikut:

Jumlah mata dadu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Frekuensi relatif	0,13	0,18	0,18	0,16	0,15	0,20

Jika dadu itu dilambungkan satu kalidan diperhatikan banyaknya mata yang muncul, maka ruang sampelnya: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Jika A= kejadian muncul mata genap, A = {2, 4, 6}

P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,18 + 0,16 + 0,20 = 0,54

Jika B = kejadian muncul mata prima, B = {2, 3, 5}

P(B) = P(2) + P(3) + P(5) = 0,18 + 0,18 + 0,15 = 0,51

UJI KOMPETENSI BAB II

1. Misalkan A dan B adalah kejadian-kejadian dengan P(A) = $\frac{3}{8}$, P(B) = $\frac{1}{2}$ dan P(A∩B)= $\frac{1}{4}$, hitunglah:
   a. P(A∪B)
   b. $P(A^C)$
   c. $P(A^C \cap B^C)$
   d. $P(B \cap A^C)$
2. Satu mata uang yang tidak setimbang dilambungkan satu kali sehingga munculnya sisi M (muka) dua kali munculnya sisi B (belakang). Hitunglah P(M), dan P(B)!
3. 3 siswa A, B, dan C bertanding renang. A dan B berprobabilitas sama untuk menang, dan probabilitasnya 2 kali probabilitas C untuk menang. Maka berapakah probabilitas bahwa B menang dalam pertandingan tersebut ?
4. Dua kartu diambil secara random dari satu pak kartu bridge (isi 52 kartu). Hitunglah peluang bahwa yang muncul:
   a. Kartu hati
   b. Kartu As
5. Dua buah dadu dilambungkan satu kali. Tentukan peluang munculnya:
   a. Jumlah mata dadu 10
   b. Jumlah mata dadu kurang dari atau sama dengan 6
   c. Jumlah mata dadu lebih dari 12
6. Dari 12 orang murid yang terdiri dari 7 pria dan 5 wanita, akan dibentuk suatu tim yang terdiri dari 3 orang murid. Berapa peluang terbentuknya sebuah tim yang terdiri dari:
   a. Paling banyak 2 murid pria
   b. Sekurang-kurangnya 1 murid wanita
7. Hasil survey yang dilaksanakan di sebuah kecamtan tentang kepemilikan mobil dan sepeda motor menghasilkan data:

   10% penduduk tidak memiliki mobil, 40% memiliki sepeda motor, dan 5% tidak memiliki mobil tetapi memiliki sepeda motor.

   Jika dari kecamatan itu dipilih satu orang secara acak, berapa peluang orang itu memiliki mobil tetapi tidak memiliki sepeda motor!
8. Kejadian A dan kejadian B adalah 2 kejadian yang saling bebas. Jika diketahui P(A) = $\frac{1}{3}$ dan P(B) = $\frac{2}{3}$, hitunglah:

a. $P(A \cap B)$
b. $P(A \cup B)$
c. $P(A^C \cap B^C)$
d. $P(A^C \cap B^C)$

9. Peluang bahwa seorang pria akan hidup selama 25 tahun adalah $\frac{3}{5}$ dan peluang bahwa istrinya akan hidup selama 25 tahun adalah $\frac{2}{3}$. Tentukan peluang bahwa:
   a. Keduanya akan hidup selama 25 tahun
   b. Hanya pria itu yang hidup selama 25 tahun
   c. Paling sedikit satu dari mereka yanghidup selama 25 tahun.

BAB III
PELUANG BERSYARAT

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Membedakan kejadian-kejadian dalam probabilitas bersyarat dan menerapkan konsep probabilitas bersyarat dalam memecahkan permasalahan

- **Indikator :**

  1. Menjelaskan syarat-syarat kejadian dalam suatu probabilitas
  2. Memberikan contoh kejadian saling bebas dan saling bergantung
  3. Membedakan kejadian saling bebas dan saling bergantung
  4. Menerapkan teori peluang bersyarat dalam menyelesaikan permasalahan.

A. Pengantar Probabilitas Bersyarat

Dalam kehidupan kita sehari-hari banyak kejadian yang saling terkait satu sama lain dan kejadian yang satu menjadi syarat untuk terjadinya kejadian yang lain. Misalnya:

1. Mahasiswa bisa mengikuti mata kuliah statistika matematika 1, asalkan mereka telah lulus mata kuliah statistika dasar.
2. Saya bersedia diajak nonton, asalkan semua tugas saya telah selesai.
3. Pemulihan krisis ekonomi dapat berhasil, jika pertikaian antar elit politik dihentikan lebih dulu

Dua peristiwa dikatakan mempunyai hubungan bersyarat jika peristiwa yang satu menjadi syarat terjadinya peristiwa yang lain. Kita tulis A/B untuk menyatakan peristiwa A terjadi dengan didahului terjadinya peristiwa B. Peluangnya ditulis $P(A/B)$ dan disebut peluang bersyarat untuk terjadinya peristiwa A dengan syarat B. Hati-hati dalam penulisan A/B tidak berarti A dibagi B

<u>Definisi 3.1:</u>

Misalkan E sebarang kejadian dalam ruang sampel S, dengan P(B)>0, probabilitas bersyarat dari kejadian A dengan syarat E terjadi ditulis P(A/E), didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0}$$

Contoh:

1. Misalkan sebuah dadu dilemparkan; B = kejadian munculnya bilangan kuadrat murni, dan diketahui bahwa peluang munculnya bilangan ganjil = $\frac{1}{9}$ dan peluang munculnya bilangan genap $= \frac{2}{9}$. Bila diketahui A ={4,5,6} telah terjadi, tentukanlah P(B/A).

   Penyelesaian:

   $$S = \{1,2,3,4,5,6\}, P(genap) = \frac{2}{9}, P(ganjil) = \frac{1}{9}$$

   $$B = \{1,4\}$$

   $$A = \{4,5,6\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

   $$A \cap B = \{4\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

   $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

2. Diketahui suatu data:

	Bekerja	Tidak bekerja	Jumlah
Laki – laki	460	40	500
Perempuan	140	260	400
Jumlah	600	300	900

   Seorang diantara orang tersebut dipilih secara acak untuk mewakili kelompok tersebut. Bila telah diketahui orang yang dipilih sudah bekerja, berapakah probabilitas orang tersebut laki-laki?

   Misal B = kejadian terpilih seorang yang sudah bekerja

   L = kejadian terpilih seorang laki-laki

   P(L) = $\frac{500}{900}$, P(B) = $\frac{600}{900}$, P(L∩B) = $\frac{460}{900}$

   $$P(L/B) = \frac{P(L \cap B)}{P(B)} = \frac{460/900}{600/900} = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

B. Probabilitas Bersayarat untuk Dua Kejadian Saling Bebas

***Definisi* 2:**

Kejadian-kejadian A dan B dikatakan bebas/independent jika P(A∩B) = P(A).P(B). jika P(A∩B)≠ P(A).P(B) maka A dan B dikatakan dependent (saling bergantung).

Bila A dan B dua kejadian dalam ruang sampel S yang saling bebas, dengan $P(A) \neq 0$ dan $P(B) \neq 0$, maka berlaku:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B) = P(A)\&\, P(B/A) = P(B)}}$$

Penjelasannya diuraikan sebagai berikut.

Kita tahu bahwa $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Akan tetapi, karena A dan B saling bebas, maka berlaku $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, sehingga diperoleh:

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan rumus kedua.

Pandang kembali probabilitas bersyarat berikut.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Rumus ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \text{ ....(*)}$$

Bila kita mempunyai tiga kejadian A, B, dan C, maka rumus (*) dapat dikembangkan untuk menentukan probabilitas kejadian majemuk $A \cap B \cap C$, yaitu.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C).P(B/C).P(C)$$

Contoh:

Misalkan kita mengambil tiga kartu, diambil tiga kali, pada sekelompok kartu bridge yang lengkap. Setiap kali mengambil, kartu yang terpilih tidak dikembalikan pada kelompok kartu itu. Ini dikatakan pengambilan kartu tanpa pengembalian. Tentukanlah probabilitas untuk memperoleh tiga kartu As.

Penyelesaian:

S = kumpulan semua kartu dengan n(S) = 52

A = terpilih kartu as pada pengambilan pertama

B/A = terpilih kartu as pada pengambilan kedua dengan syarat pada pengambilan pertama terpilih kartu as

C/A$\cap B$= terpilih kartu as pada pengambilan ketiga dengan syarat pada pengambilan pertama dan kedua harus terpilih kartu as

Oleh karena pada setiap pengambilan kartu yang terpilih tidak dikembalikan, maka jumlah kartu terus berkurang masing-masing 1 kartu, setelah pengambilan pertama, kedua, dan ketiga.

Kejadian terpilihnya tiga kartu as ditunjukkan oleh kejadian $A \cap B \cap C$. Oleh karena itu, kita akan menentukan P($A \cap B \cap C$).

Pengambilan pertama: n(A) = 4, n(S) = 52, sehingga $P(A) = \frac{4}{52}$

Pengambilan kedua: $n(B/A) = 3, n(S) = 51, P(B/A) = \frac{3}{51}$

Pengambilan ketiga: $n(C/A \cap B) = 2, n(S) = 50, P(C/A \cap B) = \frac{2}{50}$

Jadi, $P(A \cap B \cap C) = P(C/A \cap B).P(B/A).P(A)$

$$= \frac{2}{50} . \frac{3}{51} . \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{5.525}$$

UJI KOMPETENSI BAB III

1. Sepasang dadu yang setimbang dilambungkan satu kali , cari probabilitasnya bahwa jumlah mata kedua dadu ≥ 10, jika:
   a. Muncul mata dadu 5 pada dadu pertama
   b. Muncul mata 5 pada paling sedikit satu dadu
2. Misalkan A kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak laki-laki dan perempuan, B kejadian suatu keluarga mempunyai anak paling banyak satu laki-laki.
   a. Suatu keluarga berencana mempunyai 3 orang anak, tunjukan bahwa A dan B merupakan kejadian yang bebas, jika suatu keluarga mempunyai anak laki-laki
   b. Tunjukan bahwa A dan B merupakan kejadian yang dependent (saling bergantung), jika suatu keluarga mempunyai 2anak
3. Probabilitas terjadinya kebakaran pada musim panas adalah 0,1 sedangkan pada musim hujan 0,05. Jika menurut catatan lamanya musim panas adalah 60% dari sepanjang tahun, tentukan probabilitas suatu kebakaran yang sedang terjadi tepat pada musim hujan?
4. Dua buah dadu (yang pertama merah dan yang kedua biru) dilemparkan secara bersamaan sebanyak satu kali. Diketahui bahwa:
   A kejadian muncul jumlah kedua mata dadu sama dengan 6,
   B kejadian muncul mata dadu angka 1 atau 2 pada dadu merah,
   C kejadian muncul angka 2 pada salah satu mata dadu,
   Hitunglah:
   a. P(A\B) b. P(C\A) c. P(B\C)
5. Kejadian A dan B masing-masing mempunyai peluang P(A) = $\frac{3}{5}$, dan P(B) = $\frac{1}{4}$. Diketahui pula P(A∪B) = $\frac{3}{4}$,
   a. Tunjukan bahwa A dan B merupakan 2 kejadian yang tidak lepas dan juga tidak bebas!
   b. Hitunglah P(A\B) dan P(A^C\ B^C)
6. Dalam suatu keranjang ada 30 jambu. 20 buah diantaranya berwarna merah dan lainnya berwarna hijau. Jambu merah yang busuk ada 5 buah sedang jambu hijau yang busuk ada 4 buah. Secara random/acak diambil sebuah jambu dari keranjang tersebut. Jika jambu yang terambil adalah jambu yang berwarna merah, berapakah probabilitas jambu itu busuk!

7. Misalkan A, B, dan C tiga kejadian dalam ruang sampel S dengan: P(A) = 0,8, P(B) = 0,3, P(C) = 0,4, $P(A/(B \cap C)) = 0{,}5, dan\ P(B/C) = 0{,}6$.
   a. Apakah B dan C saling bebas?
   b. Apakah B dan C saling lepas?
   c. Tentukanlah P $(A \cap B \cap C)$.
   d. Tentukanlah $P((B \cap C)/A)$
8. Diketahui kejadian A dan B dengan:

   $$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, dan\ P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

   Tenukanlah:
   a. P(A/B)
   b. P(B/A)
   c. P(A$\cup B$)
   d. P(A'/B')
9. A dan B bermain catur 20 kali dan ternyata A menang 12 kali, B menag 6 kali dan 2 permainan lagi remis. Anggaplah ini sebagai data empirik untuk menentukan peluang permainan berikutnya antara A dan B. Misalkan selanjutnya A dan B akan bermain sebanyak 3 kali. Tentukan peluangya bahwa:
   a. A akan memenangkan ketiga permainan (misalkan hasil tiap permainan bersifat independen)
   b. Satu permainan berakhir remis
   c. Paling sedikit A menang satu kali.
10. Peluang seorang suami akan hidup 10 tahun lagi 0,84 dan peluang isterinya akan hidup 10 tahun lagi 0,79. Tentukan peluangnyaakan hidup 10 tahun lagi:
   a. Suami isteri kedua-duanya;
   b. Si suami saja
   c. Si isteri saja
   d. Paling sedikit seorang diantara suami isteri itu

BAB IV
PROSES STOKASTIK DAN TEOREMA BAYES

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami proses stokastik berhingga dan teorema bayes dan menerapkannya dalam menyelesaikan suatu permasalahan.

- **Indikator** :

  1. Menentukan peluang suatu kejadian bersyarat dengan proses stokastik berhingga.
  2. Memahami dan menjelaskan pengertian proses stokastik berhingga dan teorema Bayes
  3. Membedakan suatu permasalahan terkait dengan proses stokastik ataukah teorema bayes
  4. Menerapkan proses stokastik berhingga dan teorema bayes dalam menyelesaikan suatu permasalahan.

A. Proses Stokastik Berhingga

- *Proses stokastik yang berhingga* merupakan suatu deretan berhinggga dari eksperimen-eksperimen dimana tiap eksperimen mempunyai sejumlah berhingga hasil yang mungkin dengan peluang yang tertentu.
- Suatu cara yang baik untuk menjelaskan (menggambarkan)suatu proses dan perhitungan peluang (probabilitas) dari sebarang kejadian adalah dengan menggunakan diagram pohon.

  Contoh:

  1. Terdapat 3 kotak yang berisi lampu sebagai berikut:

     Kotak I berisi 10 bola lampu, 4 diantaranya mati

     Kotak II berisi 6 bola lampu, 1 diantaranya mati

     Kotak III berisi 8 bola lampu, 3 diantaranya mati

Jika kita akan memilih satu kotak secara random, kemudian dari kotak tersebut diambil sebuah lampu secara random, berapakah peluang bahwa yang terambil adalah bola lampu yang mati!

Penyelesaian:

Dalam hal ini, terdapat 2 eksperimen yaitu:

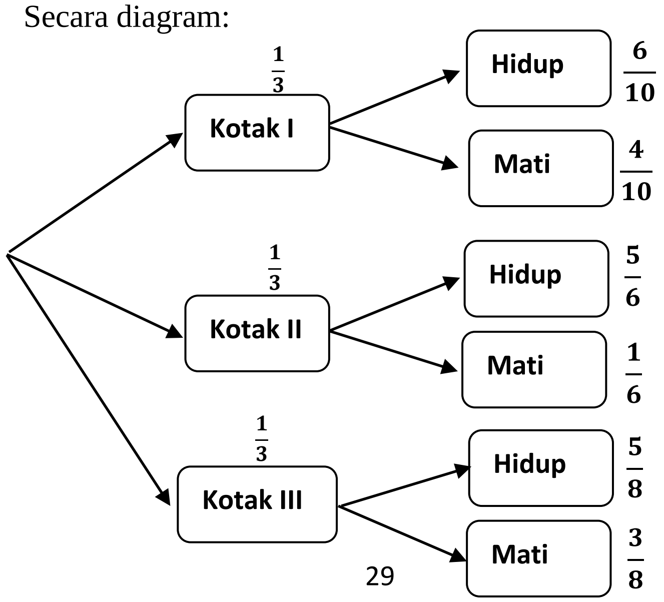
1. Memilih 1 kotak dari 3 kotak yang tersedia
   - Peluang mengambil 1 kotak dari 3 kotak yang tersedia P(K) = $\frac{1}{3}$, dimana K=kotak
2. Mengambil / memilih 1 bola yang mungkin mati (M) atau mungkin hidup (H) dari kotak tersebut.
   - Dari kotak I:
     - Peluang lampu mati $P(M_1) = \frac{4}{10}$, Peluang lampu hidup $P(H_1) = \frac{6}{10}$
     - Peluang bola mati dari kotak I:

       $P(M_1 \cap K) = P(K).P(M_1) = \frac{1}{3}.\frac{4}{10} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
   - Dari kotak II:
     - Peluang lampu mati $P(M_2) = \frac{1}{6}$, Peluang lampu hidup $P(H_2) = \frac{5}{6}$
     - Peluang bola mati dari kotak II:

       $P(M_2 \cap K) = P(K).P(M_2) = \frac{1}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$
   - Dari kotak III:
     - Peluang lampu mati $P(M_3) = \frac{3}{8}$, Peluang lampu hidup $P(H_3) = \frac{5}{8}$
     - Peluang bola mati dari kotak III:

       $P(M_3 \cap K) = P(K).P(M_3) = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

       Secara diagram:



- Jadi peluang bahwa bola yang terambil mati = $\frac{2}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{113}{360}$

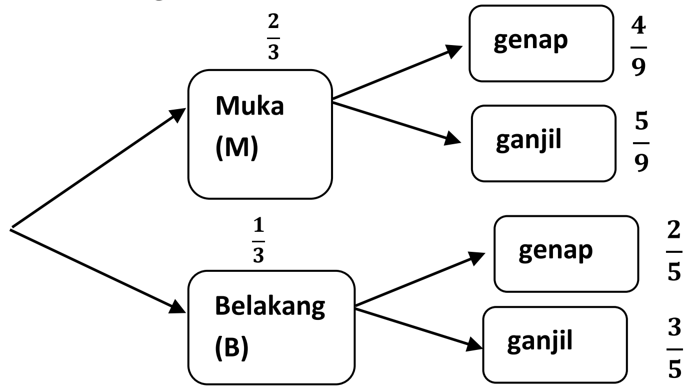
2. Sebuah mata uang yang tidak setimbang dilambungkan satu kali, dengan P(M) = $\frac{2}{3}$ dan P(B) = $\frac{1}{3}$. jika sisi M muncul, dipilih suatu bilangan secara random dari bilangan 1 sampai 9. Jika sisi B muncul, maka dipilih suatu bilangan secara random dari 1 sampai 5. Carilah bahwa yang terpilih adalah bilangan genap!

   Penyelesaian:

   - Jika muncul sisi M bilangan 1 sampai 9 yang genap ada 4 yaitu, 2, 4, 6, 8.
     - ➢ Peluang terpilih bilangan genap = $\frac{4}{9}$
   - Jika muncul sisi B bilangan dari 1 sampai 5 yang genap ada 2 yaitu, 2 dan 4
     - ➢ Peluang terpilih bilangan genap = $\frac{2}{5}$
   - Jadi peluang yang terpilih adalah bilangan genap adalah:

     $\frac{2}{3}.\frac{4}{9} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5} = \frac{8}{27} + \frac{2}{15} = \frac{58}{135}$

   Secara diagram:



B. TEOREMA BAYES

- Timbulnya suatu kejadian sering tergantung pada keadaan yang dapat mempengaruhi timbulnya kejadian itu. Misalnya peristiwa kebakaran dipengaruhi oleh keadaan cuaca, hasil percobaan menembak dipengaruhi oleh kecepatan menembak, dan lain-lain.

  <u>Contoh:</u>

  Dua buah kotak masing-masing berisi 50 batang kapur. Dalam kotak I terdapat 10 batang yang rusak, sedangkan dalam kotak II terdapat 20 batang yang rusak. Jika seseorang ingin mengambil sebuah kapur dan kebetulan rusak, berapakah probabilitas kapur itu terambil dari kotak II?

Penyelesaian:

Misal H_1 = kejadian terambil kapur dari kotak I

H_2 = kejadian terambil kapur dari kotak II

A = kejadian terambil kapur rusak

Probabilitas yang ditanyakan adalah suatu probabilitas bersyarat, yaitu $P(H_2/A)$. kejadian A dipengaruhi oleh kejadian H_1 dan H_2.

$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2)$

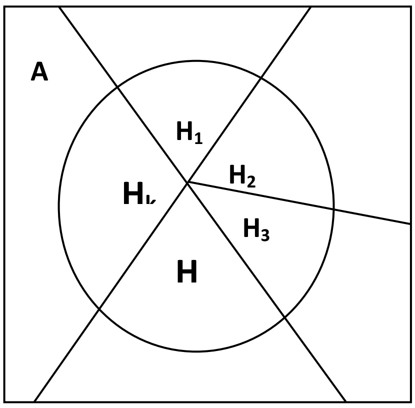
$= P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2)$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{5} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$P(H2/A) = \frac{P(A \cap H2)}{P(A)} = \frac{P(H2).P(A/H2)}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$

Andaikan ada k faktor (missal H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 …., H_k) atau keadaan yang dapat mempengaruhi munculnya suatu kejadian, ruang sampel percobaan kita bagi menjadi k daerah bagian yang saling asing, artinya tidak ada titik sampel persekutuan antar daerah itu.

Secara diagram:



Keterangan:

$P(H) > 0$ untuk setiap i (i = 1, 2, 3, 4, …., k)

$A = (H1 \cap A) \cup (H2 \cap A) \cup (H3 \cap A) \cup$ ………. $(Hk \cap A)$.

$P(A) = P(A \cap H1) + P(A \cap H2) +$ …….. $+ P(A \cap Hk)$ …………(1)

Oleh karena $P(A \cap H1) = P(H1).P(A/H1)$ maka:

$$P(Hk/A) = \frac{P(A \cap Hk)}{P(A)} = \frac{P(Hk).P\left(\frac{A}{H_k}\right)}{P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots\ldots + P(A \cap Hk)}$$

$$= \frac{P(Hk).P(A/H_k)}{\sum P(Hk)\,.\,P(A/H_k)}$$

Formula ini kita kenal dengan "FORMULA BAYES"

<u>Contoh:</u>

Tiga kotak masing-masing memiliki dua laci. Didalam laci-laci tersebut terdapat sebuah medali. Di dalam kotak I terdapat medali emas, dalam kotak kedua medali perak dan dalam laci kotak ketiga masing-masing medali emas dan perak. Diambil sebuah kotak, kemudian lacinya dibuka, ternyata isinya medali emas. Berapa probabilitasnya bahwa laci yang lain berisi medali perak?

Misalkan:

H_1 = kejadian terambil kotak I

H_2 = kejadian terambil kotak II

H_3 = kejadian terambil kotak III

A = kejadian laci yang dibuka berisi medali emas

Kotak yang memenuhi pertanyaan adalah kotak III (kotak II tidak termasuk, karena berisi perak) sehingga yang akan kita cari adalah $P(H_3/A)$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3).P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

UJI KOMPETENSI BAB IV

1. Sebuah perusahaan memiliki 3 mesin masing-masing M_1, M_2 dan $M_{3.}$ Hasil dari masing-masing mesin berturut-turut kita sebut H`, H_2 dan H_3. Mesin M_1 menghasilkan 60% dari seluruh produksi, mesin M_2 25% dan M_3 menghasilkan 15%. Selanjutnya berdasarkan hasil pemeriksaan, diketahui bahwa 5% dari H_1, 2% dari H_2 dan 80% dari H_3 cacat. Jika suatu hasil produksinya diambil secara acak, berapakah probabilitas hasil itu cacat?
2. Jika pada soal nomor 1 diketahui produk yang terambil itu cacat, berapakah probabilitas produk itu berasal dari M_2?
3. Seorang kontraktor sedang menyelesaikan perbaikan jalan. Pekerjaan itu dapat tertunda jika ada pemogokan para pekerja. Hasil probabilitas terjadinya pemogokan 0,6 , probabilitas pekerjaan selesai tepat pada waktunya tanpa pemogokan 0,85 dan probabilitas pekerjaan selesai jika ada pemogokan 0.35. Tentukanlah probabilitas bahwa pekerjaan itu selesai pada waktunya?
4. Ada 2 buah kotak, misal kotak A dan kotak B. Kotak A berisi 9 kartu yang bernomor 1 sampai 9, dan kotak B berisi 5 kartu yang bernomor 1 sampai 5. Sebuah kotak dipilih secara random dan sebuah kartu diambil. Jika kartu yang terambil bernomor genap, berapakah probabilitasnya bahwa kartu tersebut berasal dari kotak A!
5. Dalam sebuah keranjang ada 20 butir telor rebus, 12 butir diantaranya adalah telor itik, sedang sisanya adalah telor ayam. Dari ke-20 butir telor rebus itu, 4 butir telor itik dan 3 butir telor ayamdibuat asin. Sebutir telor diambil secara random dari keranjang tersebut. Berapakah Probabilitas mendapatkan telor ayam yang tidak asin?
6. Sebuah barang hasil perakitan terdiri atas 5 bagian. Tiap bagian dihasilkan secara terpisah dan secara independen daripadanya dilakukan perakitan. Dari pengalaman, ternyata 5% bagian pertama rusak, 6% bagian kedua rusak, 5% bagian ketiga rusak, 3% bagian keempat rusak, dan 2,5% persen bagian kelima rusak. Kualitas pertama terdiri atas kelima bagian yang mulus dan jika kelima bagiannya rusak, merupakan hasil buangan. Tentukan berapa % kualitas pertama dan berapa % hasil buangan akan terjadi.
7. Suau perusahaan besar menyediakan tiga hotel kelas Melati bagi akomodasi rekannya. Dari catatan sebelumnya diketahui bahwa 20% rekanannya diiapkan di *Sari-Inn,* 50% di *Ratna-Inn,* dan 30% di *Dewi-Inn.* Bila 5% diantara kamar-kamar di *Sari-Inn,* 4% di *Ratna-Inn,* dan 8% di *Dewi-Inn* terdapat kerusakan pipa air di ledengnya, hitung peluang bahwa:

   a. Seorang rekanan mendapat kamar dengan pipa air ledeng yang rusak.

b. Seseorang rekanan yang diketahui mendapat kamar dengan pipa air ledeng yang rusak ternyata menginap di *Dewi-Inn.*

8. Misalkan sejumlah kelereng berwarna dimasukkan ke dalam tiga kotak yang tidak dapat dibedakan sebagai berikut.

Warna	Kotak		
	1	2	3
Merah	2	4	3
Putih	3	1	4
Biru	5	2	3

Sebuah kotak diambil secara acak dan kemudian dari kotak yang terpilih tersebut diambil secara acak sebuah kelereng.

a. Hitung peluang terambilnya kelereng putih.

b. Bila diketahui kelereng putih, berapa peluang bahwa kelereng itu berasal dari kotak 2?

9. Pengalaman masa lalu menunjukkan bahwa setiap 100.000 produk yang dihasilkan suatu pabrik pada siang hari (S) 200 diantaranya cacat (C), dan setiap 100.000 produk yang dihasilkan malam hari (M) 500 diantaranya cacat. Selama 24 jam kerja, 1000 produk dihasilkan pada siang hari dan 600 dihasilkan pada malam hari. Dengan memakai rumus *Bayes*, hitunglah probabilitas bahwa suatu produk cacat dipilih secara acak dari 1.600 ptoduk yang dihasilkan selama 24 jam.

a. Diproduksi pada malam hari

b. Diproduksi pada siang hari

10. Ada 10 perusakaan yang menawarkan mesin pabrik anti polusi kepada seorang pemilik pabrik. Tapa memperhatikan isi usulan tawaran, pemilik pabrik akan memilih 3 secara acak masig-masing perusahaan mempunyai probabilitas yag sama untuk dipilih. Jika Toni mempunyai saham dalam 4 perusahaan, tentukan probabilitas bahwa 2 perusahaan yang terpilih tersebut adalah perusahaan-perusahaandi mana Toni mempunyai saham.

BAB V
DISTRIBUSI PROBABILITAS

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami distribusi probabilitas dan menerapkannya dalam menyelesaikan suatu permasalahan

- **Indikator** :

  1. Menentukan variabel random atau fungsi random dari suatu ruang sampel.
  2. Mengidentifikasi jenis-jenis variabel random dari distribusi probabilitas
  3. Memahami dan menentukan distribusi probabilitas variabel random diskrit dan kontinu.

A. Variabel Random / Fungsi Random

Pada eksperimen statistik seringkali yang lebih menarik perhatian untuk diamati adalah nilai-nilai yang ditentukan oleh titik sampel, bukan titik sampel itu sendiri. Pemilihan terhadap suatu percobaan dari suatu populasi dapat menimbulkan sebarang hasil yang mungkin dapat terjadi. Dengan demikian kita tidak pernah mengetahui unsur sampling yang kita peroleh. Maka, pemilihan secara acak sejumlah n unsur dari suatu populasi sebetulnya terdiri dari sejumlah n percobaan dari suatu percobaan acak. Jadi setiap kali kita memilih sampel acak, maka sama halnya dengan melakukan suatu percobaan acak yang hasilnya merupakan nilai-nilai sampling. Dengan begitu, kita akan memperoleh sejumlah angka kuantitatif bagi tiap hasil.

Sebagai contoh, ruang sampel yang memberi gambaran menyeluruh dari tiap hasil yang mungkin dari percobaan pelemparan mata uang sebanyak empat kali dapat ditulis sebagai berikut :

X = {AAAA, AAAG, AAGA, AGAA, GAAA, GGAA,…….,GGGG}

Jika yang diperlukan hanya munculnya gambar maka hasil angka kuantitatif yaitu AAAA= 0 (tidak muncul gambar), AAAG= 1 (muncul gambar 1 kali), GGAA= 2 (muncul gambar 2 kali), GGGA= 3 (muncul gambar 3 kali), GGGG= 4 (muncul gambar 4 kali), dan seterusnya. Bilangan 0, 1, 2, 3, dan 4 merupakan besaran acak yang nilainya ditentukan dari hasil percobaan. Nilai tersebut dapat dipandang sebagai nilai-nilai yag diambil oleh suatu peubah acak tertentu, yang dalam kasus ini menyatakan berapa kali muncul gambar dari pelemparan mata uang sebanyak empat kali.

Dari penjelasan di atas maka dapat diperoleh :

Definisi 5.1:

Misalkan E suatu dan S adalah ruang sampelnya. Suatu fungsi X (ditulis dengan huruf kapital) yang memetakan *"setiap" unsur x di S pada bilangan real, disebut variabel random atau fungsi random***.**

Contoh:

1. Tiga pelajar; Kiki, Luqman dan Mono menitipkan bukunya kepada salah satu teman mereka saat akan mengikuti ujian lisan. Ketika selesai ujian lisan, temannya mengembalikan buku mereka secara acak. Bila Kiki, Luqman dan Mono dalam urutan seperti itu manerima buku dari temannya, maka tulislah titik sampel untuk semua urutan yang mungkin mendapatkan buku tersebut dan kemudian cari nilai u dari U yang menyatakan jumlah urutan yang urut.

   Penyelesaian:

   Bila K, L dan M menyatakan masing-masing urutan buku milik Kiki, Luqman dan Mono. Maka susunan pengembalian buku yang mungkin dan padanan yang urut (*u*) adalah:

Ruang Sampel	*u*
KLM	3
KML	1
LKM	1
LMK	0
MLK	1
MKL	0

2. Misalnya pada eksperimen pelemparan dua mata uang. Ruang sampel S = {(M,M), (M,B), (B,M), (B,B)}, jika kita akan memperhatikan banyaknya ***sisi muka yang muncul***.

Maka didapat:

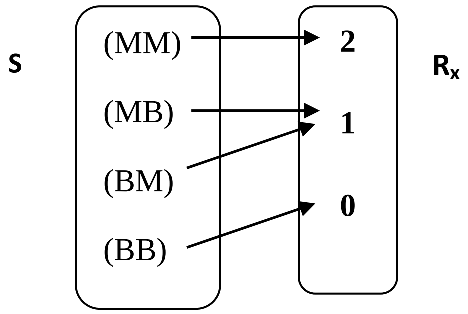
MM → sisi muka muncul sebanyak 2

MB → sisi muka muncul sebanyak 1

BM → sisi muka muncul sebanyak 1

BB → sisi muka muncul sebanyak 0

Dengan menggunakan diagram panah didapat:



Keterangan:

S = ruang sampel

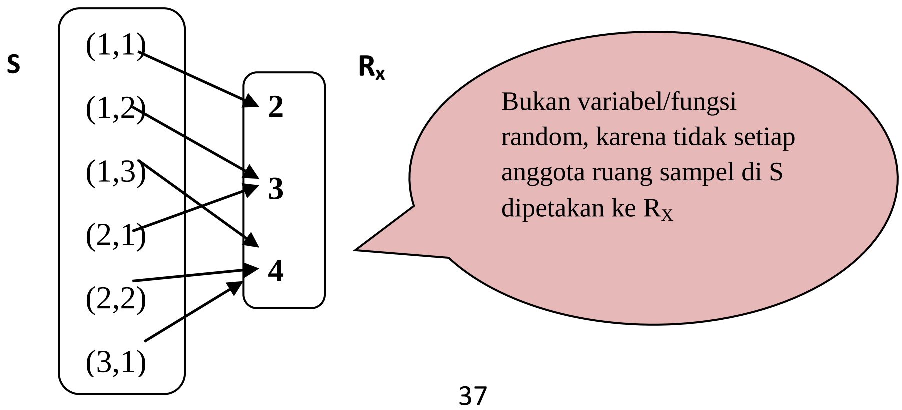
R_X = daerah hasil pemetaan

Fungsi random/variabel random pada soal diatas: X(M,M) = 2, X(M,B) = X(B,M) =1, X(B,B) = 0 dengan R_x = {0, 1, 2}

3. Dua buah dadu dilambungkan bersama-sama, ruang sampelnya:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	Kan (6,6)

Jika yang kita amati peristiwa munculnya jumlah mata dadu < 5, maka:



B. Jenis – Jenis Variabel Random

Suatu fungsi acak X yang bernilai riil di mana nilai-nilainya ditentukan oleh titik sampel-titik sampel S disebut variabel acak, dengan S merupakan ruang sampel dari suatu hasil percobaan statistik. Ilai-nilai dari variabel acak X dituliskan dengan huruf kecil $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n.}$ variabel acak X ada dua jenis, yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu.

1. Variabel Random Diskrit

Definisi 5.2:

Jika nilai yang mungkin dari variabel random X,yaitu himpunan hasil pemetaan adalah R_x, terhingga atau takhingga tetapi terbilang, maka X disebut suatu variabel random diskrit.

Pengertian himpunan terbilang (countable) adalah himpunan yang semua anggotanya dapat disebutkan satu per satu. Jadi X dapat mengambil nilai dari

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ *atau*

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ *dengan* $x \in R$

Pada contoh-contoh diatas, hasil pemetaannya terhingga dan dapat disebutkan satu persatu. Oleh karena itu variabel randomnya adalah diskrit. Jika Y menyatakan banyaknya kelahiran anak dalam satu hari maka $R_y = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$; sehingga Y juga menyatakan variabel random diskrit.

2. Variabel Random Kontinu

Definisi 5.3:

Dalam hal ruang hasil dari X merupakan semua nilai dalam suatu interval atau banyaknya hasil pemetaan tak terhingga dan tak terbilang, maka X disebut variabel random kontinu.

Misal, daerah hasil dari variabel random kontinu X adalah:

$R_x = \{x|0 \le x < 1$, x bilangan riil$\}$

$R_x = \{x|-\sim < y < \sim$, y bilangan riil$\}$

Contoh dari variabel random kontinu, antara lain variabel yang menyatakan tingginya temperatur udara, tebalnya suatu plat baja atau daya tahan suatu alat elektronika.

Kumpulan pasangan nilai-nilai dari variabel acak X dengan probabilitas nilai-nilai variabel acak X, yaitu P(X=x) disebut distribusi probabilitas X atau disingkat distribusi X. Distribusi X dapat dituliskan dalam bentuk tabel atau dalam bentuk pasangan terurut.

<u>Contoh:</u>

Pada pelemparan tiga uang logam, bila X menyatakan banyaknya muncul muka (m), tentukanlah:

a. Nilai-nilai variabel acak X
b. Distribusi probabilitas X
c. Gambarlah ditribusi probabilitas X.

Penyelesaian:

Pelemparan tiga buat uang logam memiliki ruang sampel S

$S = \{(m, m, m), (m, m, b), (m, b, m), (b, m, m), (b, b, m), (b, m, b), (m, b, b), (b, b, b)\}$

n(S) = 8

a. X = 0, X = 1, X = 2, dan X = 3
b. Probabilitas dari nilai-nilai X adalah:

$P(X = 0) = P\{(b, b, b)\} = \frac{1}{8}$

$$P(X = 1) = P\{(b, b, m)\} + P\{(b, m, b)\} + P\{(m, b, b)\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

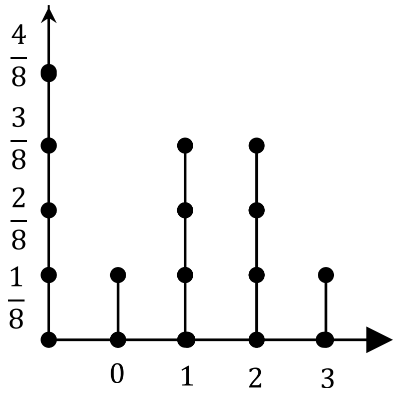
$$P(X = 2) = P\{(m, m, b)\} + P\{(m, b, m)\} + P\{(b, m, m)\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P\{(m, m, m)\} = \frac{1}{8}$$

Maka distribusi probabilitas X adalah:

X = x	0	1	2	3
P(X = x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c. Gambar dari distribusi X



C. Distribusi Probabilitas Variabel Random Diskrit

Definisi 5.4

Jika X adalah variabel acak dan P(X = x) adalah distribusi probabilitas dari X, maka fungsi f(x) = P(X = x) disebut fungsi probabilitas X atau fungsi frekuensi X atau fungsi padat peluang X.

Sifat-sifat fungsi distribusi kumulatif F(x)

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. Jika $x_1 < x_2$ maka $F(x_1) < F(x_2)$, dikatakan fungsi F(x) monoton tidak turun.
3. F(x) diskontinu dari kiri tetapi kontinu dari kanan.
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \ dan \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

Dengan memakai fungsi distribusi kumulatif F(x) kita adapat menentukan probabilitas dari variabel acak X pada interval $a \leq X \leq b$, yaitu:

$$\boxed{\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}}$$

Definisi 5.5:

Misal X adalah variabel random diskrit dari ruang sampel S. suatu fungsi f dikatakan merupakan fungsi probabilitas atau distribusi dari variabel random diskrit jika memenuhi syarat:

1. *$f(x) \geq 0, x \in R_x$*
2. *$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$*
3. *$P(X = x) = f(x)$*

Contoh:

1. Didalam suatu kotak terdapat 4 bola merah dan 2 bola putih. Diambil secara acak 3 buah bola. Tentukan distribusi probabilitas X jika X menyatakan banyaknya bola putih yang terambil!

   Penyelesaian:

   ✓ Titik sampel = $C_3^6 = 20$

   ✓ Terdapat = C_x^2 cara mendapatkan bola putih

   ✓ Terdapat = C_{3-x}^4 cara mendapatkan bola merah melengkapi bola putih

   ✓ Probabilitasnya dapat dinyatakan dengan:

   f(x) = $\frac{C_x^2 \cdot C_{3-x}^2}{C_3^6}$ $dimana\ \ x = 0, 1, 2$

   Atau

x	0	1	2
f(x)	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$

2. Sekeping uang logam dilemparkan 4 kali. Tuliskan distribusi probabilitas X yang menyatakan banyaknya sisi B yang muncul!

   Penyelesaian:

   ✓ Banyaknya titik sampel = $2^4 = 16$

   ✓ Distribusi probabilitasnya:

   f(x) = $C_x^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \cdot C_x^4$ $dimana\ x = 0, 1, 2,3,4$

   atau:

X	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

D. Distribusi Probabilitas Variabel Random Kontinu

Definisi 5.6:

Misal X adalah variabel random kontinu dari ruang sampel S. suatu fungsi f dikatakan merupakan fungsi probabilitas atau distribusi probabilitas dari variabel random kontinu X jikamemenuhi syarat:

a. $f(x) \geq 0, x \in R_x$

b. $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)dx = 1$

c. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

- Distribusi probabilitas variabel random kontinu juga disebut **"*Densitas*"** atau ***fungsi densitas dari variabel random***.

<u>*Contoh:*</u>

1. Tentukan nilai *c* agar:

   $$F(x) = \begin{cases} = cx^2 \text{ ; } 0<x<1 \\ = 0 \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

   Merupakan distribusi probabilitas kontinu dari X!

   Penyelesaian:

   Syarat kedua dari definisi distribusi probabilitas adalah:

   $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)dx = 1$

   $\int_0^1 Cx^2 dx = 1$

   $[\frac{1}{3} Cx^3]_0^1 = 1$

   $\frac{1}{3}\mathrm{C} = 1$

   c = 3

   Jadi nilai c = 3
2. Variabel random kontinu X memiliki nilai antara x = 1 dan x = 3 mempunyai fungsi densitas f(x) = $\frac{1}{2}$
   a. Perlihatkan bahwa luas daerah dibawah kurva dan diatas sumbu x adalah 1!
   b. Carilah P(2 < X < 2,5)
   c. Carilah P(X $\leq$ 1,6)

   Penyelesaian:

   a. Ingat lagi ***mata kuliah kalkulus*** bahwa luas daerah dibawah kurva dan diatas sumbu x adalah:

   L = $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

   $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} [x]_1^3 = \frac{1}{2}$ (3-1) = 1

b. $P(2 < X < 2{,}5) = \int_{2}^{2,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} [x]_{2}^{2,5} = \frac{1}{2} (2{,}5-2) = 0{,}25$

c. $P(x \leq 1{,}6) = P(1 \leq x \leq 1{,}6)$

$$= \int_{1}^{1,6} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} [x]_{1}^{1,6} = \frac{1}{2} (1{,}6-1) = 0{,}3$$

UJI KOMPETENSI BAB V

1. Sebuah mata uang logam dilambungkan 3 kali. Tentukan nilai varibel random yang menyatakan banyaknya sisi muka (M) yang muncul dikurangi banyaknya sisi belakang (B) yang muncul.
2. Dua buah kotak masing-masing berisi 5 buah kartu bertuliskan angka 1,2,3,4,5. Dari kotak I dan II masing-masing diambil sebuah kartu secara random. Tentukan nilai dari varibel random yang menyatakan jumlah kedua angka yang terambil.
3. Pada lebel kawat baja tertulis:
   Diameter (2 ± 0,0005) mm,
   Tentukan nilai dari varibel random yang menunjukkan diameter kawat baja yang diproduksi pabrik tersebut.
4. Dari 6 orang mahasiswa pelamar kerja di suatu perusahaan, 2 orang diantaranya adalah mahasiswa FKIP. Ditetapkan, perusahaan hanya akan menerima 3 orang yang dipilih secara random dari pelamar tersebut. Jika X menyatakan banyaknya mahasiswa FKIP yang diterima, tentukan distribusi probabilitasnya!
5. Diketahui fungsi densitas:

$$F(x) = \begin{cases} = \frac{1}{9}x^2;\ 0<x<3, \text{ x bilangan real} \\ = 0 \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

   Tentukan:
   a. $P(|X| < 1)$
   b. $P(X^2 < 9)$
6. Dari 5 mobil yang diimpor, ada 2 mobil yang catnya sedikit cacat. Misalkan sebuah agen menerima 3 mobil secara acak. Mobil cacat diberi tanda C dan mobil tidak cacat diberi tanda T.
   a. Buatlah ruang sampel S yang menyatakan semua kombinasi mobil yang diterima oleh agen tersebut.
   b. Jika X menyatakan banyaknya mobil yang cacat, tentukanlah distribusi probabilitas X.
7. Suatu variabel acak X mempunyai fungsi probabilitas $f(x) = \frac{1}{3}$ pada interval $1 \leq X \leq 4$.

a. Tunjukkanlah bahwa luas daerah di bawah kurva f sama dengan 1. Apa yang ditunjukkan oleh luas daerah tersebut?

b. Hitunglah $P(1,5 < X < 3)$

c. Hitunglah $P(X < 2,5)$

d. Hitunglah $P(X \geq 3,0)$

8. Suatu variabel acak kontinu X mempunyai fungsi probabilitas:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \\ 2 - x, \text{ untuk } 1 \leq x < 2 \\ 0, \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

a. Tunjukkanlah bahwa $P(0 < X, 2) = 1$.

b. Hitunglah $P(X > 1,2)$

c. Hitunglah $P(X < 1,5)$

BAB VI
EKSPEKTASI MATEMATIKA DAN VARIANS

- **Capaian Pembelajaran :**

Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- Kemampuan Akhir yang direncanakan **:**

1. Memahami konsep ekspektasi matematika dan menerapkannya dalam menyelesaikan masalah.
2. Memahami dan menentukan varians dari suatu variabel random.

- **Indikator** :

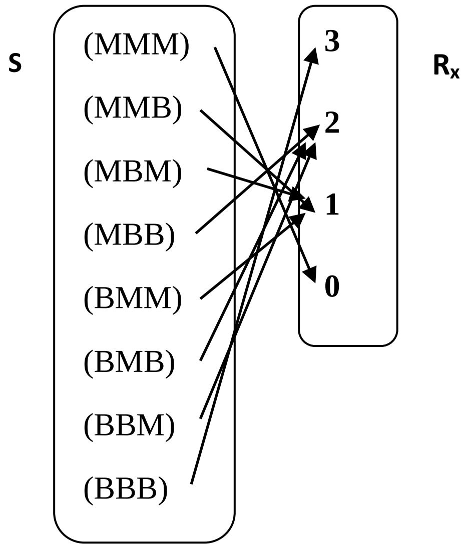
1. Memahami ekspektasi matematika dan hubungannya dalam kehidupan
2. Memahami teorema terkait ekspektasi matematika
3. Menerapkan konsep ekspektasi matematika dalam pemecahan masalah.
4. Menjelaskan pengertian varians dan kegunaannya
5. Menerapkan konsep varians dalam penyelesaian suatu masalah

A. Ekspektasi Matematis

1. Pengertian Ekspektasi Matematis

Dalam suatu percobaan tentu ada hasil yang diharapkan. Untuk mendapatkan hasil yang baik dan kesimpulan hasil yang akurat, maka percobaan statistika tersebut dilakukan berulang kali. Hal tersebut dimaksudkan untuk memperoleh suatu hasil yang benar-benar mendekati,sehingga kesimpulan yang dihasilkan valid. Ukuran yang menyatakan harapan dari hasil yang dapat diperoleh dari suatu percobaan statistika dinyatakan secara matematis sebagai ekspektasi matematika.

Misalkan kita melakukan pelemparam 3 mata uang sebanyak 16 kali, kemudian kita perhatikan sisi belakang (B) yang muncul maka didapat:



Misalkan pada percobaan itu terdapat:

- 3 lemparan tidak muncul sisi belakang (B), frekuensi relatifnya adalah $\frac{3}{16}$
- 6 lemparan muncul 1sisi belakang (B), frekuensi relatifnya adalah $\frac{6}{16}$
- 4 lemparan muncul 2 sisi belakang (B), frekuensi relatifnya adalah $\frac{4}{16}$
- 3 lemparan muncul 3 sisi belakang (B), frekuensi relatifnya adalah $\frac{3}{16}$

Maka rata-rata dari banyaknya sisi B yang muncul untuk setiap lemparan adalah:

$\frac{0(3)+1(6)+2(4)+3(3)}{16} = \frac{0+6+8+9}{16} = \frac{23}{16} = 1{,}44$

Nilai rata-rata ini dikenal dengan nama ***"nilai harapan"*** atau ***"ekspektasi matematika"*** atau ***"harapan matematis".***

<u>Definisi 6.1:</u>

Andaikan X adalah sebuah variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…	$f(x_n)$

nilai harapan x atau harapan matematis x yaitu:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}$$

Definisi 6.2:

Andaikan X adalah sebuah variabel random kontdengan distribusi probabilitas:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	...	$\boldsymbol{x_n}$
$\boldsymbol{P(X = x)}$	$\boldsymbol{f(x_1)}$	$\boldsymbol{f(x_2)}$	$\boldsymbol{f(x_3)}$	...	$\boldsymbol{f(x_n)}$

nilai harapan x atau harapan matematis x yaitu:

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}}$$

Definisi 6.3:

andaikan X adalah suatu variabel random kontinu dengan distribusi probabilitas f(x). nilai harapan atau ekspektasi matematis dari X ditulis E(X), didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx}}$$

Contoh:

1. Diketahui sekelompok ahli terdiri dari 4 orang ahli kimia dan 3 orang ahli biologi. Kita bentuk suatu komisi yang terdiri dari 3 orang yang disebut komisi tiga. Jika anggota komisi tiga diambil secara acak dari ketujuh orang ahli tersebut , tentukan nilai harapan dari banyaknya ahli kimia yang dapat duduk dalam komisi tiga tersebut!

   Penyelesaian:

   - Andaikan X menyatakan banyaknya ahli kimia dalam komisi tiga, variabel random X dapat memiliki nilai 0, 1, 2, dan 3.
   - Distribusi probabilitas dari variabel X adalah:

     F(x) = $\frac{C_x^4 \cdot C_{3-x}^3}{C_3^7}$ $dimana\ x = 0, 1, 2, dan\ 3$

     Dengan menggunakan rumus kombinatorial, kita peroleh:

     f(0) = $\frac{1}{35}$, f(1) = $\frac{12}{35}$, f(2) = $\frac{18}{35}$, f(3) = $\frac{4}{35}$
   - Selanjutnya kita peroleh:

     E(X) = $0(\frac{1}{35}) + 1(\frac{12}{35}) + 2(\frac{18}{35}) + 3(\frac{4}{35}) = 1{,}7$

Dari hasil ini kita dapat menyimpulkan bahwa andaikata komisi tiga itu dibentuk berulang– ulang kali maka kita mengharapkan banyaknya ahli kimia dalam setiap komisi yang terbentuk adalah 1,7 orang (2 orang sebagai hasil pendekatan/pembulatan).

2. Andaikan X adalah variabel random yang menyatakan lamanya masa pakai suatu tabung dalam jam. Fungsi probabilitasnya ditetapkan dengan:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} = \dfrac{20.000}{x^3}, \text{ jika } x > 100 \\ = 0 \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

Tentukan harapan matematis dari masa pakai tabung itu!

Penyelesaian:

Definisi harapan matematis dari variabel random kontinu adalah:

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$

Jika variabel random X menyatakan masa pakai tabung dalam jam, maka:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{100}^{\infty} x\, f(x)dx \\ &= \int_{100}^{\infty} x\, \frac{20.000}{x^3} dx \\ &= \int_{100}^{\infty} \frac{20.000}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{20.000}{x}\right]_{100}^{\infty} = 0 + 200 = 200 \end{aligned}$$

Dapat kita simpulkan bahwa rata-rata (harapan matematis) masa pakai tabung itu adalah 200 jam.

2. Teorema-Teorema Ekspektasi Matematis

Teorema 6.1:

Andaikan a dan b adalah konstanta maka berlaku:

i. *$E(aX + b) = a\,E(X) + b$*
ii. *Jika $a = 0$, maka $E(b)=b$*
iii. *Jika $b = 0$, maka $E(aX) = aE(X)$*
iv. *$E[g(X)+ h(X)] = E[g(X)]+ E[h(X)]$*
v. *Jika $g(X,Y) = X$ dan $h(X,Y)=Y$ maka $E(X+ Y)= E(X)+E(Y)$*
vi. *Jika X dan Y dua peubah acak yang bebas, maka $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

Bukti:

i. Bukti 1:

Andaikan X merupakan variabel random kontinu, maka:

$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty}(aX + b)\, f(x)dx$

$= a \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} x\; f(x)dx \;+ b \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$= a \,.\, E(X) + b.1$

$= a\, E(X) + b$ (**terbukti**)

Bukti 2:

Andaikan X merupakan variabel random diskrit, maka:

$E(aX + b) = \sum(aX + b)\, f(x)$

$= \sum(aX)\, f(x) + \sum(b)\, f(x)$

$= a \sum(X)\, f(x) + b \sum f(x)$

$= a\, E(X) + b$ (**terbukti**)

(Bukti sifat berikutnya sebagai latihan mahasiswa)

Catatan:

✓ Teorema ini dapat berlaku untuk variabel random diskrit maupun kontinu

✓ Berdasarkan teorema diatas dapat diturunkan sifat-sifat:

- Jika k adalah suatu konstanta, maka E(k) = k, hali ini diperoleh jika diambil a = 0
- Jika k adalah konstanta dan f(x) menyatakan distribusi probabilitas maka E[kf(x)]=k.E[f(x)], hal ini diperoleh jika b = 0
- Jika μ rata-rata, maka E(X - μ) = 0

<u>Contoh:</u>

3. Andaikan X adalah variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Tentukan:

a. Ekspektasi matematis dari X!

b. Nilai dari E(2X - 1)!

Penyelesaian:

a. $E(X) = \sum_0^3 x\, f(x)$

$= 0.f(0) + 1.f(1) + 2.f(2) + 3.f(3)$

$= 0.(\frac{1}{3}) + 1.(\frac{1}{2}) + 2.(0) + 3.(\frac{1}{6})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b. $E(2X - 1) = 2E(X) + (-1)$

$= 2(1) – 1 = 1$

4. Dalam suatu bisnis tertentu, seseorang dapat memperoleh keuntungan sebesar Rp3.000.000,00 dengan probabilitas 0,6 atau menderita kerugian sebesar Rp1.000.000,00 dengan probabilitas 0,4. Tentukan nilai harapannya!

Penyelesaian:

Misalkan X = keuntungan yang diperoleh dalam bisnis

P(X=x)= probabilitas memperoleh keuntungan tersebut, maka nilai $X_1 = 3.000.000$ dengan probabilitas P(X=3.000.000) = 0,6 dan $X_2 = -1.000.000$ dengan probabilitas P(X = -1.000.000) = 0,4.

Nilai harapan X adalah:

$$E(X) = 3.000.000(0{,}6) - 1.000.000(0.4) = 1.400.000$$

Karena nilai harapan positif, maka bisnis itu memberi harapan keuntungan sebesar Rp1.400.000,00. Makin besar nilai harapan, maka makin besar juga keuntungannya.

B. Varians

- Varians digunakan untuk mengukur variabilitas suatu distribusi kemungkinan.
- Varians dari suatu variabel randon X ditulis ***Var(X)***
- Misalkan X variabel random dengan harapan matematis E(X), maka :

Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2)

Contoh:

1. Andaikan X adalah variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

X	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Tentukan Var(X)

Penyelesaian :

$E(X) = \sum_{x=1}^{4} x \cdot f(x)$

$= 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 4 \cdot f(4)$

$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 2\frac{2}{3}$

$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 \cdot f(x)$

$= 1 \cdot f(1) + 4 \cdot f(2) + 9 \cdot f(3) + 16 \cdot f(4)$

$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 16 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + 1 + 3 + 4 = 8\frac{1}{6}$

$Var(X) = E(X^2) – (E(X^2))$

$= \frac{49}{6} - (\frac{8}{3})^2 = \frac{49}{6} - \frac{64}{9} = \frac{19}{18} = 1\ \frac{1}{18}$

2. Tentukan varians dari varibel random kontinu X dengan fungsi densitas :

   $f(x) = 2(x-1)$; $1 < x < 2$, x bilangan real

   $= 0$; untuk x yang lain

   Penyelesaian :

   $E(X) = \int_1^2 x \cdot f(x)\, dx$

   $= 2\int_1^2 x \cdot (x - 1)\, dx = 2\int_1^2 (x^2 - x)\, dx$

   $= 2\ [\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]\ _1^2 = [\ \frac{2}{3}x^3 - x^2]\ _1^2 = \frac{5}{3} = 1\ \frac{2}{3}$

   $E(X^2) = \int_1^2 x^2 \cdot f(x)\, dx$

   $= 2\int_1^2 x^2 \cdot (x - 1)\, dx = [\ \frac{2}{4}x^4 – \frac{2}{3}\ x^3]_1^2 = \frac{17}{16} = 2\ \frac{5}{6}$

   $Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2$

   $= \frac{17}{16} - (\frac{5}{3}) = \frac{1}{18}$

3. Tiga keping mata uang dilempar bersama-sama. Jika X adalah peristiwa banyaknya sisi B yang muncul, tentukan var (X)!

   Penyelesaian:

   Distribusi probabilitasnya:

   - MMM (sisi B muncul sebanyak 0)

- MMB (sisi B muncul sebanyak 1)
- MBM (sisi B muncul sebanyak 1)
- BMM (sisi B muncul sebanyak 1)
- BMB (sisi B muncul sebanyak 2)
- BBM (sisi B muncul sebanyak 2)
- MBB (sisi B muncul sebanyak 2)
- BBB (sisi B muncul sebanyak 3)

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f(x)$

$= 0. f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3)$

$= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{3}{6} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f(x)$

$= 0^2. f(0) + 1^2 \cdot f(1) + 2^2 \cdot f(2) + 3^2 \cdot f(3)$

$= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{3}{6} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2$

$= 3 – (\frac{3}{2})^2 = 3\text{-}(\frac{9}{4}) = \frac{3}{4}$

Teorema 6.2:

Jika c suatu konstanta, maka Var(c) = 0

Bukti:

$Var(c) = E(c^2) – (E(c))^2$,

Ingat!
Penurunan sifat teorema pada bab ekspekatasi matematis E(k) = k, dimana k konstanta

$E(c^2) = c^2$

$E(c) = c$

$Var(c) = E(c^2) – (E(c))^2 = c^2 – c^2 = 0$ (terbukti)

Teorema 6.3:

Jika X suatu variabel random dan c suatu konstanta maka berlaku:

$Var(X + c) = Var(X)$

Bukti:

$Var(X + c) = E(X + c)^2 – (E(X + c))^2$

$= E(X^2 + 2cX + c^2) – ((E(X) + c)^2$, (ingat: $E(aX + b) = a.E(X) + b$)

$= E(X^2) + E(2cX) + E(c^2) – [(E(X))^2 + 2cE(X) + c^2]$

$= E(X^2) + E(2cX) + E(c^2) – (E(X))^2 - 2cE(X) - c^2$

$= E(X^2) – (E(X))^2$

$= Var(X)$ (terbukti)

Teorema 6.4:

Jika X suatu variabel random dan c suatu konstanta maka berlaku:

$Var(cX) = c^2. Var(X)$

Bukti:

$Var(cX) = E(cX)^2 – (E(cX))^2$

$= E(c^2X^2) – (cE(X))^2$

$= c^2 . E(X^2) - (c^2.E(X))^2$

$= c^2 . [E(X^2) - (E(X))^2]$

$= c^2. Var(X)$ (terbukti)

Contoh:

1. Andaikan X adalah variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tentukan Var(5X)!

Penyelesaian:

$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \,.\, f(x)$

$= 0.\, f(0) + 1 \,.\, f(1) + 2 \,.\, f(2) + 3 \,.\, f(3)$

$= 0 \,.\, \frac{1}{8} + 1 \,.\, \frac{3}{8} + 2 \,.\, \frac{3}{8} + 3 \,.\, \frac{1}{8} = \frac{3}{6} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 \,.\, f(x)$

$= 0^2.\, f(0) + 1^2 \,.\, f(1) + 2^2 \,.\, f(2) + 3^2 \,.\, f(3)$

$= 0 \,.\, \frac{1}{8} + 1 \,.\, \frac{3}{8} + 4 \,.\, \frac{3}{8} + 9 \,.\, \frac{1}{8} = \frac{3}{6} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2$

$= 3 – (\frac{3}{2})^2 = 3- (\frac{9}{4}) = \frac{3}{4}$

$Var(5X) = 5^2. (var(X))$, *menggunakan teorema 4*

$= 25 \,.\, (\frac{3}{4}) = \frac{75}{4}$

2. Diketahui suatu variabel random kontinu mempunyai fungsi densitas:

   $f(x) \quad = \frac{1}{4}x;\ 1 < x < 3, x \in R$

   $= 0$ untuk x yang lain.

   Tentukan Var(X+3), Var(3) dan Var(3X)!

   Penyelesaian:

   $E(X) = \int_1^3 x \,.\, f(x)\, dx$

   $= \int_1^3 x \,.\, \frac{1}{4}x\, dx = \int_1^3 \frac{1}{4}x^2\, dx = \frac{1}{12}\,[x^3]_1^3 = 2\,\frac{1}{6}$

   $E(X^2) = \int_1^3 x^2 \,.\, f(x)\, dx = \int_1^2 x^2 \,.\, \frac{1}{4}x\, dx = [\frac{1}{16}x^4]_1^3 = \frac{1}{16}(81-1) = 5$

   $Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2 = 5 - (\frac{13}{6}) = 5 - \frac{169}{36} = \frac{11}{36}$

   Sehingga var(X +3) = var(X) = $\frac{11}{36}$, (*menggunakan teorema 3*)

   Sehingga var(3) = 0, (*menggunakan teorema 2*)

   Sehingga var(3X) = 3^2 . var(X) = = $3^2 \,.\, \frac{11}{36} = 9. \frac{11}{36} = \frac{99}{36}$, (*menggunakan teorema 4*)

UJI KOMPETENSI BAB VI

1. Andaikan X suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas:

   $f(x) = 3x^2$; untuk $0 < x < 1$, x bilangan real

   $= 0$; untuk x yang lain

   Tentukanlah:

   a. E(X)
   b. E(X - 1)
   c. E(4X + 1)

2. Andaikan X adalah variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas:

   $f(x) = \frac{x^2}{5}$; untuk $0 < x < 3$, x bilangan bulat

   $= 0$; untuk x yang lain

   Tentukanlah:

   a. E(X)
   b. E(2X + 5)

3. Misal variabel random X berdistribusi sebagai berikut:

X	0	1	2
f(x)	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

   Tentukan Var(X), Var (X+4), Var(6X), dan Var$(2x + 3)^2$!

4. Andaikan X suatu variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{20}(x+1); untuk\ 0 < x < 4, x \in B \\ 0 \text{ ; untuk x yang lain} \end{cases}$$

   Hitunglah Var(X), Var (X+4), Var(6X), dan Var$(2x^2 + 4x - 2)$!

BAB VII
DISTRIBUSI PROBABILITAS VARIABEL RANDOM DISKRIT

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami dan menentukan distribusi probabilitas dari variabel random diskrit yang meliputi distribusi binomial, poisson, geometrik, dan hipergeomterik.

- **Indikator :**

  1. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi binomial dalam menyelesaikan permasalahan.
  2. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi Poisson dalam menyelesaikan permasalahan.
  3. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi geometrik dalam menyelesaikan permasalahan.
  4. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi hipergeometrik dalam menyelesaikan permasalahan.

A. Distribusi Binomial

Hasil-hasil yang muncul dalam suatu percobaan statistik dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu *kejadian sukses* dan *kejadian gagal*, di mana probabilitas kejadian sukses dan kejadian gagal adalah *tetap*. Selain itu, juga dapat diamati bahwa kejadian sukses dan kejadian gagaldari satu percobaan ke percobaan berikutnya adalah saling bebas.

Suatu percobaan statistik disebut percobaan binomial atau Benouli jika percobaan statistik tersebut mempunyai ciri-ciri:

1. Percobaan diulang sebanyak n kali
2. Setiap hasil percobaa dibedakan menjadi dua, yaitu kejadian sukses (S) dan kejadian gagal (G)
3. Probabilitas terjdinya kejadian sukses (S) dan gagal (G), yaitu P(sukses) = P(S) = p, dan P(gagal) = P(G) = 1 – p = q, adalah tetap pada tiap kali percobaan diulang; dan
4. Semua hasil yang muncul saling bebas satu sama lain.

Contoh:

Sebuah dadu dilemparkan sebanyak 100 kali. Misalkan munculnya sisi muka 5 kita sebut kejadian sukses (S) dan kejadian munculnya sisi bukan 5 kita sebut kejadian gagal (G), maka P(sukses) = $P(S) = \frac{1}{6}, dan\ P(gagal) = P(G) = 1 - \frac{1}{6} = 1 - p = q$ tetap. Kejadian munculnya muka 5 pada pelemparan pertama dan pada pelemparan kedua juga bebas satu sama lain dari satu percobaan ke percobaan berikutnya. Percobaan ini disebut percobaan binomial.

Perumusan Distribusi Binomial

Misalnya percobaan pelemparan sebuah uang logam sebanyak 3 kali (n = 3). Munculnya sisi muka kita sebut kejadian sukses (S) dan kejadian munculnya sisi belakang kita sebut kejadian gagal (G). Dari percobaan tersebut diperoleh S = {SSS,SSG, SGS, GSS, GGS, GSG, SGG, GGG}. Kita misalkan P(S) = p dan P(G) = 1 – p = q tetap dari satu percobaan ke percobaan berikutnya, maka kita peroleh probabilitas kejadian 8 titik sampel tersebut, yaitu:

Probabilitas kejadian SSS adalah P(SSS) = $P(S).P(S).P(S) = p.p.p = p^3$

Probabilitas kejadian SSG adalah P(SSG) = $P(S).P(S).P(G) = p.p.q = p^2q$

Probabilitas kejadian SGS adalah P(SGS) = $P(S).P(G).P(S) = p.q.p = p^2q$

Probabilitas kejadian GSS adalah P(GSS) = $P(G).P(S).P(S) = q.p.p = p^2q$

Probabilitas kejadian GGS adalah P(GGS) = $P(G).P(G).P(S) = q.q.p = pq^2$

Probabilitas kejadian GSG adalah P(GSG) = $P(G).P(S).P(G) = q.p.q = pq^2$

Probabilitas kejadian SGG adalah P(SGG) = $P(S).P(G).P(G) = p.q.q = pq^2$

Probabilitas kejadian GGG adalah P(GGG) = $P(G).P(G).P(G) = q.q.q = q^3$

Secara lebih ringkas dan terinci hasil-hasil tersebut kita nyatakan pada tabel 7.1 berikut.

Tabel 7.1

No	Kejadian	Probabilitas	Variabel Acak X	P(X = x)
1	SSS	p^3	X = 3	$P(X = 3) = p^3$
2	SSG	p^2q	X = 2	$P(X = 2) = 3p^2q$
3	SGS	p^2q		
4	GSS	p^2q		
5	GGS	pq^2	X = 1	$P(X = 1) = 3pq^2$

No	Kejadian	Probabilitas	Variabel Acak X	P(X = x)
6	GSG	pq^2		
7	SGG	pq^2		
8	GGG	q^3	X = 0	$P(X = 0) = q^3$

Perhatikan bahwa:

$P(X = 3) = p^3 = 1.p^3.q^0 = \binom{3}{3}p^3.q^{3-3}, 3\ sukses\ dan\ 0\ gagal$

$P(X = 2) = 3p^2q = 3.p^2.q^{3-2} = \binom{3}{2}p^2.q^{3-2}, 2\ sukses\ dan\ 1\ gagal$

$P(X = 1) = 3pq^2 = 3.p^1.q^{3-1} = \binom{3}{1}p^1.q^{3-1}, 1\ sukses\ dan\ 2\ gagal$

$P(X = 0) = q^3 = 1.p^0.q^{3-0} = \binom{3}{0}p^0.q^{3-0}, 0\ sukses\ dan\ 3\ gagal$

Diperoleh:

$P(X = x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}, x = 0,1,2, \dots, n$

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh bahwa distribusi binomial dari variabel acak X dapat dirumuskan menjadi:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = P(X = x) = b(x, n, p) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}}}$$

Dimana x = 0, 1, 2, 3,..., n dan q = 1 – p

p dan q disebut parameter

Untuk menunjukan bahwa distribusi binomial merupakan distribusi probabilitas, maka akan harus ditunjukkan bahwa memenuhi syarat:

1. *$f(x) \geq 0$*

   karena $0 \leq p \leq 1$ dan nilai kombinasi pasti positif, maka *f(x)* pasti positif

2. $\sum_x f(x) = 1$

   Dengan menggunakan kesamaan pada binomial newton $\boldsymbol{(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n, r)}$ $\boldsymbol{a^{n-r}\ b^r}$ pada *f(x)* maka akan diperoleh:

   binomial newton = Distribusi binomial

   $(a + b)^n = b(x;n,p)$

   $\sum_r^n C(n, r)\ a^{n-r}\ b^r = C_x^n.\ q^{n-x}\ p^x$, berdasaran kesamaan disamping maka bentuk $p^x.q^{n-x}$ $= p^x.(1-p)^{n-x}$ dapat dinyatakan dengan $(p + (1-p))^n = 1^n = 1$ sehingga

   $\sum_x f(x) = \sum_{x=0} C_x^n.\ q^{n-x}\ p^x = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$

Berdasakan hasil yang didapat pada 1 dan 2 diatas maka terbuki bahwa distribusi binomial merupakan distribusi probabilitas.

Ekspektasi Matematisnya

$$\boxed{\mathbf{E(X) = n.p}}$$

Bukti:

$E(X) = \sum_x x \,.\, f(x)$

$= \sum_{x=0}^{n} x \,.\, P(x)$

$= \sum_{x=0}^{n} x \,.\, P(X = x)$

$= \sum_{x=0}^{n} x \,.\, C_x^n .\, p^x.q^{n-x}$

$= \sum_{x=0}^{n} x \,.\, C_x^n .\, p^x.(1-p)^{n-x}$

$=[\boldsymbol{(0.C_0^n.\, p^0.q^{n-0})} + (1.C_1^n.\, p^1.q^{n-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$= 0 + \sum_{x=1}^{n} x \,.\, C_x^n .\, p^x.(1-p)^{n-x}$

$= \sum_{x=1}^{n} x \,.\, \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x.(1-p)^{n-x}$, kita uraikan *x!* dan *n!*

$= \sum_{x=1}^{n} x \,.\, \frac{n\,(n-1)!}{x\,(x-1)!(n-x)!}\, p^x.(1-p)^{n-x}$, kita modifikasi bentuk P^x

$= \sum_{x=1}^{n} \quad \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}\,(p.p^{x-1}).(1-p)^{n-x}$

$= n.p \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}\,(p^{x-1}).(1-p)^{n-x}$

Misalkan m = n-1 dan s = x-1, maka persamaan diatas menjadi:

$E(X) = n.p \sum_{x=0}^{m} \frac{m!}{s!\,.(m-s)!}\,(p^s).(1-p)^{m-s}$

Berdasarkan bentuk pada syarat (2) diatas yang berbentuk $\sum_{x=0} C_x^n .\, q^{n-x}\, p^x = 1$, maka

$E(X) = n.p \sum_{x=0}^{m} \frac{m!}{S!\,.(m-s)!}\,(p^s).(1-p)^{m-s}$

$= n.p\ (1)$

$= n.p$ (***terbukti***)

Variansnya

$$\boxed{\mathbf{Var\ (X) = n.p.q}}$$

dimana n = banyaknya percobaan

p = sukses

q = gagal, q = (1-p)

Bukti:

$Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2$

Dalam mencari Var(X), kita harus mencari terlebih dahulu nilai ekspektasi matematika dari x^2.

$$E(X^2) = = \sum_{x=0}^{n} x^2 . P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!.(n-x)!} (p^x).(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!.(n-x)!} (p^x).(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{(x-1)!.(n-x)!} (pp^{x-1}).(1-p)^{n-x}$$

$$= n.p \sum_{x=0}^{n} x \frac{(n-1)!}{(x-1)!.(n-x)!} (p^{x-1}).(1-p)^{n-x}$$

Misalkan m = n-1 dan s = x-1, maka persamaan diatas menjadi:

$$E(X^2) = n.p \sum_{s=0}^{m} (s+1) \frac{m!}{s!.(m-s)!} (p^s).(1-p)^{m-s}$$

$$= n.p \sum_{s=0}^{m} (s+1)C_s^m (p^s).(1-p)^{m-s}$$, menurut sifat zigma:

$$= n.p [\sum_{s=0}^{m} (s).C_s^m (p^s).(1-p)^{m-s} + \sum_{s=0}^{m} (1).C_s^m (p^s).(1-p)^{m-s}]$$

$$= n.p [\sum_{s=0}^{m} (s).C_s^m (p^s).(1-p)^{m-s} + (1).(0)]$$

$$= n.p [\sum_{s=0}^{m} (s).\frac{m(m-1)!}{s(s-1)!(m-s)!} (p.p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1]$$

$$= n.p [\sum_{s=0}^{m} \frac{m(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p.p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1]$$

$$= n.p [\sum_{s=0}^{m}(mp) \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p^{s-1}).(1-p)^{m-s}]+1]$$

$$= n.p [(mp) \sum_{s=0}^{m} \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1]$$

Jika kita misalkan *m-1= k dan s-1 = l*, maka persamaan diatas menjadi:

$$E(X^2) = n.p [(mp) \sum_{l=1}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} (p^l).(1-p)^{k-l} + 1]$$ menurut syarat (2):

$$= n.p [(mp) . (1) + 1]$$

$$= n.p [mp + 1]$$

$$= n.p [(n-1)p + 1]$$

$$= n.p [(np – p)+ 1]$$

Sehingga $Var(X) = E(X^2) – (E(X))^2$

$$= n.p [(np – p)+ 1] – (np)^2$$

$$= (np)^2 – np^2 + np – (np)^2$$

$$= np – np^2$$

$= np\,(1-p)$

$= n.p.q$ ***(terbukti)***

<u>Contoh:</u>

1. Sebuah mata uang dilambungkan 10 kali.
   a. Tentukan probabilitas munculnya sisi muka sebanyak 5 kali!, serta hitunglah E(X) dan Var(X) - nya!
   b. Tentukan probabilitas munculnya sisi belakang sebanyak 2 kali!

   Penyelesaian:

   a. Misalkan peristiwa ***hasil sukses adalah munculnya sisi muka (M),*** maka P (sukses) = P(M) = $\frac{1}{2}$ = p, dan P(gagal) = P(B) = $\frac{1}{2}$ = q, sehingga distribusi binomialnya:

   $b(x;n,p) = C_x^n .\, p^x . q^{n-x}$

   $b(5;10,\frac{1}{2}) = C_5^{10} .\, (\frac{1}{2})^5 . (\frac{1}{2})^{10-5} = 252.\, (\frac{1}{32}) . (\frac{1}{32}) = \frac{252}{1024} = 0{,}246$

   $E(X) = n.p = 10\ (\frac{1}{2} = 5)$

   $Var\,(X) = n.p.q = 10.(\frac{1}{2}).(\frac{1}{2}) = 2{,}5$

   b. Misalkan peristiwa ***hasil sukses adalah munculnya sisi belakang(belakang),*** maka P (sukses) = P(B) = $\frac{1}{2}$ = p, dan P(gagal) = P(M) = $\frac{1}{2}$ = q, sehingga distribusi binomialnya:

   $b(x;n,p) = C_x^n .\, p^x . q^{n-x}$

   $b(2;10,\frac{1}{2}) = C_2^{10} .\, (\frac{1}{2})^2 . (\frac{1}{2})^{10-2} = 45.\, (\frac{1}{4}) . (\frac{1}{256}) = \frac{45}{1024} = 0{,}044$

2. Dalam suatu klinik bersalin terjadi 10 kelahiran tiap minggunya. Tentukan probabilitas lahirnya 3orang anak laki-laki dalam seminggu!

   Penyelesaian:

   Misal ***peristiwa sukses adalah kelahiran laki-laki***, maka P(sukses) = $\frac{1}{2}$ = p, dan q = $1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, sehingga probabilitas yang dimaksud adalah:

   $b(x;n,p) = C_x^n .\, p^x . q^{n-x}$

   $b(3;10,\frac{1}{2}) = C_3^{10} .\, (\frac{1}{2})^3 . (\frac{1}{2})^{10-3} = 120.\, (\frac{1}{8}) . (\frac{1}{128}) = \frac{120}{1024} = 0{,}117$

B. Distribusi Poisson

Dari distribusi binomial kita dapatkan $b(x;n,p) = C^n_x . p^x.q^{n-x}$. jika nilai kemungkinan dari sukses (p) dibuat kecil sekali ($p \to 0$) dan percobaan dilakukan banyak sekali ($n \to \sim$).

<u>Ciri – Ciri Distribusi Poisson :</u>

1. Hasil percobaan yang terjadi pada suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau suatu daerah lain yang terpisah
2. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan sebanding dengan panjang selang waktu dan luas tempat percobaan terjadi. Hal ini berlaku hanya untuk selang waktu yang singkat dan luas daerah yang sempit
3. Peluang lebih dari satu percobaan yang terjadi dalam interval waktu yang singkat atau dalam daerah yang kecil dapat diabaikan.

Distribusi poisson dengan peubah acak X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu tertentu dirumuskan oleh:

$$\mathbf{P}(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}.\,\mu^x}{x!}$$

Keterangan:

e = 2,71828… (bilangan napier)

μ = rata – rata keberhasilan, dimana **μ** = n . p

x = banyaknya unsur sukses dalam sampel

n = jumlah atau ukuran populasi

Jika X merupakan variabel random diskrit dalam distribusi poisson, maka ekspektasi matematis dan variansnya dinyatakan dengan :

Ekspektasi matematisnya: E (X) = μ

Variansnya : Var (X) =μ

Contoh:

1. Misalkan rata-rata ada 1,4 orang buta huruf dari setiap 100 orang. Diambil sampel berukuran 200 orang, jika X menyatakan banyaknya orang buta huruf dari 200 orang itu, maka nilai

   μ = n . p = 200 (1,4) = 2,8.

   Maka nilai kemungkinan bahwa dalam sampel itu ***tidak terdapat orang yang buta huruf*** adalah:

   $\mathbf{P(x = 0)} = \frac{e^{-\mu}.\,\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-2,8}.\,2,8^{0}}{0!} = \mathbf{0,0608}$

   Sedangkan nilai kemungkinan terdapatnya ***orang buta huruf*** dalam sampel itu adalah: 1 - 0,0608 = 0,9392

2. Dari sekumpulan orang, 1 % nya berkacamata. Secara random ditunjuk 500 orang.

   a. Tentukan probabilitasnya bahwa dari 500 orang itu yang berkacamata 2 orang

   b. Berapa orangkah yang diharapkan berkacamata dari 500 orang tersebut

   c. Carilah varians banyaknya orang yang berkacamata dari 500 oarang tersebut

   Penyelesaian:

   P = 1 % = 0,01

   n = 500

   μ = n.p = 500.(0,01) = 5

   a. P(x = 2) = $\frac{e^{-\mu}.\,\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-5}.\,5^{2}}{2!} = \mathbf{0,0848}$

   b. E (X) = μ = 5

   c. Variansnya : Var (X) = μ = 5

3. 200 penumpang telah memesan tiket untuk sebuah penerbangan luar negeri. Jika probabilitas penumpang yang telah ***mempunyai tiket tidak akan datang*** adalah 0,01. Berapakah peluang ada 3 orang yang telah ***mempunyai tiket namun tidak akan datang***? Berapa pula peluang ada 3 orang penumpang yang telah ***mempunyai tiket namun akan datang?***

   Penyelesaian:

   Misal p = peluang penumpang yang telah ***mempunyai tiket tidak akan datang***

   n =200 x = 3

   p = 0,01 **μ** = n . p = 200.(0,01) = 2

   P(x = 3) = $\frac{e^{-\mu}.\,\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}.\,2^{3}}{3!} = 0,1804$

Sedangkan peluang ada 3 orang penumpang yang telah ***mempunyai tiket namun akan datang*** adalah = 1 – P(x=3) = 1- 0,1804 = 0,8196

C. Distribusi Geometrik

Distribusi geometrik merupakan distribusi probabilitas untuk mendapatkan kejadian ***sukses pertama kali*** setelah sekian kejadian gagal. Misal, kita melakukan remedial teaching kepada seorang siswa, remidi itu akan dilakukan terus menerus sampai akhirnya berhasil (sukses), jika sukses sudah didapat, maka remidi akan dihentikan.

Ciri-ciri distribusi geometric antara lain:

a. Eksperimen dilakukan sampai berulang-ulang (sampai akhirnya mendapatkan sukses)
b. Antar ulangannya saling bebas
c. Probabilitas sukses pada tiap ulangannya sama yaitu *P*, dimana 0 < P < 1
d. Percobaan ini dilakukan / diulang sampai diperoleh satu buah sukses yang pertama.

Misal pada suatu eksperimen, sukses dinyatakan dengan *p* dan gagal dinyatakan dengan *q* dimana *q* = 1-*p* , maka distribusi probabilitas untuk mendapatkan kejadian sukses ke-*r* pada percobaan ke –*x* didefinisikan oleh:

$$\boxed{\mathbf{P(X = x) = C_{r-1}^{x-1} P^r . (1 - P)^{x-r} \text{ atau } P(X = x) = C_{r-1}^{x-1} P^r . (q)^{x-r}}}$$

Karena dalam distribusi geometrik, kita mengharapkan sukses pertama kali (*r* = 1), maka berdasarkan definisi diatas didapat:

$P(X = x) = C_{1-1}^{x-1} P^1 . (1 - P)^{x-1}$

$P(X = x) = C_{0}^{x-1} P . (1 - P)^{x-1}$

$$\boxed{\mathbf{P(X = x) = P . (1 - P)^{x-1} \text{ atau } g(x,p) = p . q^{x-1} \text{ untuk } x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots}}$$

Misalkan X adalah variabel random yang menyatakan banyaknya gagal sebelum sukses pertama kali, ruang nilai dari X adalah A = {0,1,2,3,4,…..}. yang mana fungsi probabilitasnya dapat dinyatakan dengan:

- ✓ P(X=0) = P(S) = p
- ✓ P(X=1) = P(GS) = P(G)P(S) = qp = pq
- ✓ P(X=2) = P(GGS) = P(G)P(G)P(S) = $q^2p = pq^2$

- ✓ $P(X=2) = P(GGS) = P(G)P(G)P(G)P(S) = q^3p = pq^3$
- ✓ $P(X= x) = P(GS) = P(G)P(G)P(G)........P(S) = q^x p = pq^x$

Perhatikan bahwa $p, pq^2, pq^3, pq^4, pq^5, pq^6, \ldots\ldots, pq^x$ (berbentuk ***Barisan Geometri dengan rasio - r***). berdasarkan hal inilah, distribusi ini dinamakan distribusi geometri.

Rumus Distribusi geometri diatas merupakan distribusi probabilitas (***Probability Mass function***). Untuk menunjukan bahwa distribusi geometri merupakan distribusi probabilitas, maka akan harus ditunjukkan bahwa memenuhi syarat:

1. Dari definisi diatas diketahui $f(x) = pq^{x-1}$ untuk x = 1,2,3,4,….. dan $0 \leq P \leq 1$ maka dapat dikatakan *f(x)* adalah positif.
2. $\sum_x f(x) = \sum_0^{\infty} p(1-p)^{x-1} = 1$

   Jumlah deret tak hingga suatu deret geometri dengan *a* merupakan suku pertama dan *r* merupakan rasio antar suku adalah:

   $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ ………………………….. (persamaan 1)

   Dengan menggunakan deret geometri (persamaan 2) diperoleh $a = p$, dan $r = 1- p$ sehingga $\sum_x f(x) = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$

<u>Ekspektasi matematisnya</u>

$E(X) = \frac{1}{p}$, dimana p = kejadian

<u>Variansnya</u>

$Var(X) = \frac{q}{p^2}$, dimana p = kejadian sukses, dan q = kejadian gagal

<u>Contoh</u>:

1. Sebuah mata uang dilambungkan 5 kali. Kejadian sukses adalah kejadian munculnya sisi muka (M). tentukan probabilitas terjadinya sukses pertama kali pada lambungan ke-3!, serta tentukan E(X) dan Var(X) – nya!

Penyelesaian:

$p = P(M) = \frac{1}{2}$

$q = 1- p = 1- 0,5 = 0,5$ $x = 3$

$g(x,p) = g(3; 0,5)$

$= p.\, q^{x-1}$

$= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,5} = 2$

$Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,5}{(0,5)^2} = \frac{1}{0,5}$

2. Didalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 didalam 100 barang adalah cacat. Tentukan:
   a. Berapakah probabilitas bahwa barang ke-5 yang diperiksa merupakan barang cacat pertama yang ditemukan?
   b. Berapakah ekspektasi matematik nya?
   c. Berapakah variansnya?

   Penyelesaian:

   Misal *p* (sukses) = kejadian barang yang cacat

   P(*p*) = 0,01 sedangakan *q*= 1 – *p* = 1 – 0,01 = 0,99 dan *x* = 5

   a. $g(x,p) = g(5; 0,01) = p.\, q^{x-1} = (0,01)\,(0,99)^4 = 0,0096$
   b. $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,01} = 100$
   c. $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,99}{(0,01)^2} = 9900$

D. Distribusi Hipergeometrik

1. Distribusi Hipergeometrik

- ✓ Distribusi hipergeometrik merupakan distribusi probabilitas diskrit dari sekelompok objek yang dipilih tanpa pengembalian
- ✓ Ciri-ciri distribusi hipergeometrik:
  a. Sampel acak berukuran *n* diambil dari populasi berukuran *N* objek
  b. Sebanyak *k* dari *N* diklasifikasikan sebagai ***"sukses"*** dan sebagian lagi diklasifikasikan sebagai ***"gagal"***
- ✓ Misal terdapat ***a buah sukses*** dan ***b buah unsur***, maka terdapat
  a. $\boldsymbol{C_x^a}$ cara untuk memperoleh ***x*** unsur dari ***a buah unsur sukses***, dan
  b. $\boldsymbol{C_{n-x}^b}$ cara untuk memperoleh ***(n-x)*** unsur dari ***b buah unsur gagal***,
  c. Jadi terdapat $\boldsymbol{C_x^a . C_{n-x}^b}$ cara untuk mendapatkan terjadinya ***x sukses dan (n-x) gagal dari (a+b) unsur.***

d. Sehingga ***probabilitas*** untuk mendapatkan terjadinya *x sukses dan (n-x) gagal* adalah:

$$P(X = x) = \frac{C_x^a \,.\, C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}, \boldsymbol{untuk\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots.}$$

Dimana a = sukses

b = gagal

✓ Distribusi probabilitas diatas disebut ***DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK*** dan sering kali dinyatakan dengan:

$$h(x;n;a;b) = \frac{C_x^a \,.\, C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}, \boldsymbol{untuk\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots.}$$

Dimana a = sukses

b = gagal

Atau

$$h(x;N;n;k) = \frac{C_x^k \,.\, C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}, \boldsymbol{untuk\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots.}$$

Dimana N = ukuran populasi

n = ukuran sampel

k = banyaknya unsur pada populasi

x = banyaknya peristiwa sukses

✓ Jika X merupakan distribusi probabilitas hipergeometrik, maka:

Jika *p* probabilitas terjadinya sukses pada distribusi hipergeometrik, dan *p* dinyatakan dengan $p = \frac{a}{a+b}$ dengan *a* = sukses dan *b* = gagal, maka:

Ekspektasi Matematisnya

E(X) =n.p **dimana** ***p*** **= probabilitas sukses**

Variansnya

$$\mathbf{Var\ (X) = n\ .\ p\ .q\ \left(\frac{a+b-n}{a+b-1}\right)}$$

dimana p = probabilitas sukses, dan q = probabilitas gagal

Contoh:

1. Suatu komite yang terdiri dari 5 orang akan dipilih secara acak 3 orang ahli kimia dan 5 orang ahli fisika. Tentukan probabilitas banyaknya ahli kimia dalam komite itu!

   Penyelesaian:

   Misal X = banyaknya ahli kimia dalam komite,

   R_x = {0, 1, 2, 3}, n = 5, a = 3 (ahli kimia), dan b = 5 (ahli fisika)

   a. Jika tidak ada ahli kimia dalam komite itu (x = 0)

   $$h(x;n;a;b) = \frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$$

   $$h(0;5;3;5) = \frac{C_0^3 \cdot C_{5-0}^5}{C_5^{(3+5)}} = \frac{1}{56}$$

   b. Jika ada 1 orang ahli kimia dalam komite itu (x = 1)

   $$h(x;n;a;b) = \frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$$

   $$h(1;5;3;5) = \frac{C_1^3 \cdot C_{5-1}^5}{C_5^{(3+5)}} = \frac{15}{56}$$

   c. Jika ada 2 orang ahli kimia dalam komite itu (x = 2)

   $$h(x;n;a;b) = \frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$$

   $$h(2;5;3;5) = \frac{C_2^3 \cdot C_{5-2}^5}{C_5^{(3+5)}} = \frac{30}{56}$$

   d. Jika ada 3orang ahli kimia dalam komite itu (x =3)

   $$h(x;n;a;b) = \frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$$

   $$h(3;5;3;5) = \frac{C_3^3 \cdot C_{5-3}^5}{C_5^{(3+5)}} = \frac{10}{56}$$

2. Lihat pada soal no. 1, tentukan probabilitas banyaknya 2 orang ahli fisika dalam komite itu! Dan tentukan E(X) dan Var(X) - nya!

   Penyelesaian:

   Misal X = banyaknya ahli fisika dalam komite,

   R_x = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, x = 2, n = 5, b = 3 (ahli kimia), dan a = 5 (ahli fisika) h(x;n;a;b) = $\frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$

h(2;5;5;3) = $\frac{C_2^5 \cdot C_{5-2}^3}{C_5^{(5+3)}} = \frac{10}{56}$

Ekspektasi matematis:

$p = \frac{a}{a+b} = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$

$q = 1 - p = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

E(X) = *n.p* = 5 . $(\frac{5}{8}) = \frac{25}{8}$

Varians-nya:

Var (X) = n . p .q $(\frac{a+b-n}{a+b-1})$ = 5 . $(\frac{5}{8})$.$(\frac{3}{8})$ $(\frac{5+3-5}{5+3-1})$ = $\left(\frac{75}{64}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{225}{448} = 0{,}502$

3. Sejumlah radio transistor kecil akan dikirim dalam beberapa peti dan masing – masing peti berisi 50 buah radio. Seorang pemeriksa mengambil 5 radio dari satu peti secara random tanpa pengembalian. Jika tidak ada radio yang rusak, maka peti itu akan dikirimkan kepada distributor. Tetapi jika ada satu atau lebih yang rusak semua radio yang ada dalam peti itu akan diperiksa. Misalkan dalam peti yang terambil itu ada 3 buah radio yang rusak, berapakah probabilitasnya bahwa akan diadakan pemeriksaan *seluruh* radio dalam peti itu!

   Penyelesaian:

   Jika ada satu atau lebih yang rusak semua radio yang ada dalam peti itu akan ***diperiksa.***

   Misal X = banyaknya radio yang rusak dalam peti yang terambil.

   Probabilitas bahwa seluruh radio yang rusak dalam peti diperiksa sama dengan probabilitas bahwa dari sampel yang terambil terdapat 1 atau 2 atau 3 atau 4 atau 5 radio yang rusak.

   Jadi P(x ≥ 1) = 1 – P(x = 0)

   = 1 - h(0;5;3;47)

   =1 - $\frac{C_x^a \cdot C_{n-x}^b}{C_n^{(a+b)}}$ = 1 - $\frac{C_0^3 \cdot C_{5-0}^{47}}{C_5^{(3+47)}} = 0{,}280$

2. Perluasan Distribusi Hipergeometrik Jika Mengandung Lebih Dari 2 Jenis

Misalkan ada 3 jenis, masing-masing n_1, n_2 , dan n_3 dengan $n_1 + n_2 + n_3 = N$ unsur. Diambil sampel sebesar r yang mengandung ketiga jenis tersebut masing –masing k_1, k_2 , dan k_3 dengan $k_1 + k_2 + k_3 = r$. maka probabilitas bahwa terambil k_1 dari n_1, k_2 dari n_2 dan k_3 dari n_3 adalah:

$$\mathbf{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2 , X_3 = k_3) = \frac{C_{k_1}^{n_1} \cdot C_{k_2}^{n_2} \cdot C_{k_3}^{n_3}}{C_r^n}}$$

Contoh:

1. Didalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola hitam. Kemudian diambil secara acak 3 bola sekaligus. Tentukan probabilitas ketiga bola yang terambil berlainan warna!

   Penyelesaian:

   Misal X = kejadian terambil ketiga bola berlainan warna.

   x_1 = kejadian terambil bola merah

   x_2 = kejadian terambil bola putih

   x_3 = kejadian terambil bola hitam

   $$P(X_1 = 1, X_2 = 1 , X_3 = 1) = \frac{C_1^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3}{C_3^{12}} = \frac{5.4.3}{220} = \frac{3}{11}$$

2. Dari 10 pengemudi motor, 3 orang mengemudikan motor merk ***“S”*** **,** 4 orang mengemudikan motor merk ***“Y”*** **,** dan sisanya mengemudikan motor merk ***“H”.*** jika secara acak diambil 5 orang, berapa peluang 1 orang mengemudikan motor merk ***“S”***, 2 orang merk ***“Y”*** dan 2 orang merk ***“H”***!

   Penyelesaian:

   Misal: a_1 = merk S = 3

   a_2 = merk S = 4

   a_3 = merk H =3

   n = 10, x_1 = 1, x_2 = 2 dan x_3 = 2

   $$P(X_1 = 1, X_2 = 2 , X_3 = 2) = \frac{C_1^3 \cdot C_2^4 \cdot C_2^3}{C_5^{10}} = \frac{3.6.3}{252} = \frac{3}{18}$$

UJI KOMPETENSI BAB VII

1. Diketahui 10% dari sekumpulan kaleng cat berisi cat warna hijau. Diambil secara random 30 kaleng, berapa peluangnya bahwa:
   a. Yang terambil semuanya (30 kaleng) berisi cat hijau
   b. Yang terambil 1 kaleng berisi cat hijau
   c. Yang terambil paling sedikit 1 kaleng berisi cat hijau
   d. Yang terambil paling banyak 2 kaleng berisi cat hijau
2. Probabilitas seorang pasien sembuh dari penyakit adalah 0,4. 15 orang telah diketahui terjangkit penyakit tersebut, berapakah probabilitasnya bahwa:
   a. Paling sedikit 10 orang dapat bertahan dan sembuh
   b. Antara 3 sampai 8 orang dapat sembuh
   c. Tepat 5 orang yang dapat sembuh
3. Dari setumpukan ember 20% diketahui bocor. Diambil sampel sebanyak 40 secara random. Berapakah harapan matematis dan variansnya bahwa yang terambil tidak bocor?
4. Pada setiap 100 lembar kertas produksi suatu pabrik diperkirakan terdapat 1 lembar yang rusak. Tentukan probabilitas mendapatkan selembar kertas rusak dari 20 lembar kertas yang diambil secara acak dari hasil produksi tersebut.
5. Andaikan 2% dari uang di Bank adalah palsu. Tentukan probabilitas terdapat 3 lembar uang palsu dari 100 lembar uang yang diambil secara acak di Bank tersebut. Kemudian tentukan harapan matematis dan variansnya!
6. Peluang seorang akan mendapatkan reaksi buruk setelah disuntik besarnya 0,0005. Dari 4000 orang yang disuntik, tentukan peluang yang mendapatkan reaksi buruk:
   a. Tidak ada
   b. Ada 2 orang
   c. Lebih dari 2 orang
   d. Tentukan ada berapa orang diharapkan yang akan mendapat reaksi buruk.
7. Pada saat waktu sibuk, sebuah papan sakelar telepon sangat mendekati kapasitasnya sehingga para penelepon mengalami kesulitan melakukan hubungan. Jika probabilitas p = 0,05 dari sebuah sambungan selama waktu sibuk.
   a. Berapakah probabilitas bahwa diperlukan 5 kali upaya untuk suatu sambungan agar berhasil!
   b. Berapakah ekspektasi matematikanya!
   c. Berapakah variansnya!

8. Diketahui ada 2% barang yang rusak dari seluruh barang produksi suatu pabrik. Pengepakan barang dilakukan dengan system ban berjalan (barang bergerak satu persatu). Tentukan probabilitas munculnya barang yang rusak pada barang yang keluar pertama kali dari ban berjalan!
9. Dua dadu dilempar bersama-sama. Tentukan harapan matematis dan varians dari konsep munculnya mata dadu kembar untuk pertama kali!
10. Probabilitas lulus mata kuliah *"statistik matematika"* adalah 95%, berapakah probabilitas anda lulus tahun depan dan seterusnya!
11. Sekelompok orang terdiri dari 50 orang 3 diantaranya lahir pada tanggal 1 januari. Diambil secara acak 5 orang, berapakah probabilitas bahwa diantara 5 orang tadi :
    a. Tidak terdapat orang yang lahir pada tanggal 1 januari!
    b. Tidak lebih dari seorang yang lahir pada tanggal 1 januari!
12. 5 buah kartu diambil dari 52 kartu bridge, berapa probabilitasnya bahwa kartu yang terambil:
    a. Sebuah kartu As
    b. Paling sedikit 1 kartu As
13. Suatu perkumpulan beranggotakan 12 orang pria dan 8 orang wanita, jika dibentuk komisi yang terdiri dari 5 orang secara random, berapakah probabilitas komisi tersebut terdiri dari:
    a. 3 orang pria dan 2 orang wanita
    b. Paling sedikit terdiri dari 3 orang pria
    c. Berjenis kelamin sama

BAB VIII

DISTRIBUSI POBABILITAS VARIABEL RANDOM KONTINU

- **Capaian Pembelajaran :**

  Setelah menempuh mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menganalisis teori peluang, ekspektasi matematika dan mengaplikasikannya pada distribusi peluang yang bertipe diskrit maupun kontinu.

- **Kemampuan Akhir yang direncanakan :**

  Memahami dan menentukan distribusi probabilitas variabel random kontinu yang meliputi distribusi uniform dan eksponensial

- **Indikator :**

  1. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi uniform dalam menyelesaikan permasalahan.
  2. Menjelaskan dan menerapkan konsep distribusi ekponensial dalam menyelesaikan permasalahan.

A. DISTRIBUSI UNIFORM

Pada materi terdahulu, kita telah mengetahui bahwa X dikatakan sebagai variabel random kontinu (fungsi densitas) jika:

a. $f(x) \geq 0, x \in R_x$

b. $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)dx = 1$

c. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Misalkan X variabel random kontinu dalam selang tertutup [a,b] = {a| a≤ b, x ϵ R} dengan a,b ∈R. jika fungsi densitas f(x) didefinisikan sebagai:

$f(x) = \frac{1}{b-a}, 8ntuk\ a \leq x \leq b$

$= 0$, *untuk x yang lain*

Ekspektasi Matematis

$E(x) = \int_{-\sim}^{\sim} x\, f(x)dx$

$= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$

$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_a^b$

$= \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2)$

$= \frac{b+a}{2}$

<u>Variansnya</u>:

Var (X) = $E(x^2) - (E(X))^2$

E $(x^2) = \int_{-\sim}^{\sim} x^2 f(x)dx$

$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$

$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_a^b$

$= \frac{1}{3(b-a)} \cdot (b^3 - a^3)$

$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$

Var (X) = $E(x^2) - (E(X))^2$

$= \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3}\right) - \frac{(b+a)^2}{4}$

$= \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3}\right) - \left(\frac{b^2 + 2ab + b^2}{4}\right)$

$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2}{12} - \frac{(3b^2 + 6ab + 3b^2)}{12}$

$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12}$

$= \frac{(b-a)^2}{12}$

Contoh:

1. Jika X variabel random kontinu yang fungsinya dinyatakan dengan

   $f(x) = \frac{1}{2}$ untuk $x \in [-1, 1]$

   = 0 untuk x yang lain

   Buktikan bahwa f(x) merupakan fungsi densitas uniform!

   Penyelesaian:

   Agar f(x) merupakan fungsi densitas maka:

   $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)dx = 1$

   $\int f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Selain itu, untuk ∀ x∈ [-1,1], f(x)≥0, karena untuk ∀x∈ [-1,1], f(x)= $\frac{1}{2}$, f(x) merupakan fungsi densitas uniform karena f(x) dapat dinyatakan dengan:

f(x) = $\frac{1}{b-a}, untuk\ a \leq x \leq b$

= 0, untuk x yang lain

f(x) = $\frac{1}{1-(-1)}, untuk -1 \leq x \leq 1$

= 0, untuk x yang lain

2. Variabel random X berdistribusi uniform dengan fungsi densitas:

   f(x) = $\frac{1}{4}$ untuk $0 \leq x \leq 4$

   = 0 untuk x yang lain

   Penyelesaian:

   - P $(1 \leq x \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{4} dx = [\frac{1}{4}x]_1^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
   - P $(x< 2) = \int_{-\sim}^{2} f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4} dx = [\frac{1}{4}x]_0^2 = \frac{1}{2}$
   - P $(x\geq 3) = \int_3^{\sim} f(x)dx = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = [\frac{1}{4}x]_3^4 = \frac{1}{4}$

3. Misal X variabel random kontinu yang mempunyai fungsi densitas uniform sebagai berikut:

   f(x) = $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, untuk x ∈ [- $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$]

   = 0, untuk x yang lain

   Hitunglah harapan matematis dan variansnya?

   Penyelesaian:

   E (X) = $\frac{b+a}{2} = \frac{\sqrt{3} + (-\sqrt{3})}{2} = 0$

   Var (X) = $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(\sqrt{3}-(-\sqrt{3}))^2}{12} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{12} = 1$

B. DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

- ✓ Misal X variabel random kontinu dengan fungsi f(x) yang dinyatakan dengan:

  f(x) = $\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ dx, untuk x > 0

  = 0, untuk x yang lain dengan λ > 0

- ✓ Untuk setiap x dan λ > 0, maka $e^{-\lambda x} > 0$ sehingga berlaku untuk ∀x dan λ>0 maka f(x)≥0.

$\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx = \int_{0}^{\sim} \lambda.\, e^{-\lambda x}\,dx$

$= - \int_{0}^{\sim} e^{-\lambda x}\, d(-\lambda x)$

$= -[\, e^{-\lambda x}]_{0}$

$= 0+1 = 1$

Karena untuk untuk setiap x dan $\lambda > 0$ berlaku $f(x) \geq 0$ dan $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx = 1$ maka fungsi **$f(x) = \lambda\ .\ e^{-\lambda x}$ dx, untuk x > 0**

= 0, untuk x yang lain

dengan $\lambda > 0$

merupakan fungsi densitas, yang dinamakan ***Fungsi Densitas Eksponensial*** atau ***Distribusi Eksponensial***.

- Untuk $\lambda = 1$ maka berlaku:

  $f(x) = e^{-x}$ dx, untuk x > 0

  = 0, untuk x yang lain

- **Ekspektasi Matematisnya:**

  $E(x) = \int_{-\sim}^{\sim} x\, f(x) dx$

  $= \int_{0}^{\sim} x\, e^{-\lambda x}\,dx = - \int_{0}^{\sim} x\, d(e^{-\lambda x})$

  $= -[\, x\, e^{-\lambda x}]_{0}^{\sim} + \int_{0}^{\sim} e^{-\lambda x}\,dx$

  $= 0 - \frac{1}{\lambda}\, [e^{-\lambda x}]_{0}^{\sim}$

  $= \frac{1}{\lambda}$

- **Variansnya:**

  $Var(X) = E(x^2) - (E(X))^2$

  $E(x^2) = \int_{-\sim}^{\sim} x^2\, f(x) dx$

  $= \int_{0}^{\sim} x^2\, (\lambda.\, e^{-\lambda x})dx$

  $= - \int_{0}^{\sim} x^2\, d(e^{-\lambda x})$

  $= -[\, x^2\, e^{-\lambda x}]_{0}^{\sim} + \int_{0}^{\sim} 2x\, e^{-\lambda x}\,dx$

  $= 0 + \frac{2}{\lambda}\,.\,E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$

  $Var(X) = E(x^2) - (E(X))^2$

  $= \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2$

  $= \frac{1}{\lambda^2}$

Contoh:

1. Misal X variabel random kontinu berdistribusi eksponensial:

   $f(x) = 3e^{-3x}$, untuk x > 0

   = 0, untuk x yang lain

   Tentukan $P(1 \leq x \leq 2)$?

   Penyelesaian:

   $P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 3e^{-3x}dx = [-e^{-3x}]_1^2 = -e^{-6} + e^{-3} = 0{,}0473$

2. Misal X variabel random kontinu berdistribusi eksponensial:

   $f(x) = 2e^{-2x}$, untuk $0 < x < \sim$

   = 0, untuk x yang lain

   a. Buktikan bahwa f(x) merupakan fungsi densitas eksponensial
   b. Tentukan $P(0 < x < 2)$?

      Penyelesaian:

   a. $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx = \int_0^{\sim} 2\,e^{-2x}\,dx = [-e^{-2x}]_0^{\sim} = 0-(-1) = 1$

      Jadi terbukti bahwa $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx = 1$ merupakan fungsi densitas ekponensial dengan λ=2

   b. $P(0 < x < 2) = \int_0^2 2e^{-2x}dx = [-e^{-2x}]_0^2 = -e^{-4} + 1 = 0{,}9817$

3. Misal X variabel random kontinu berdistribusi eksponensial:

   $f(x) = 2e^{-2x}$, untuk x > 0

   = 0, untuk x yang lain

   Tentukan ekspektasi matematis dan nilai variansnya?

   Penyelesaian:

   Diketahui : fungsi f(x) tersebut mempunyai λ = 2, sehingga:

   $E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

   $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

DAFTAR PUSTAKA

Boediono dan Wayan Koster. 2014. *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas. Edisi ke-5*. Bandung: PT. Remaja Rosdakarya

Hogg, R.V, Craig, A.T. 1978, *Intoduction to Mathematical Statistic,* 4^{th} ed. London: Macmillan International Edition.

Sudjana. 2005. *Metoda Statistika*. Bandung: Tarsito.

Walpole, Ronald, Myres, Raymond, & RK Sembiring. 1995. *Peluand dan Statistika untuk Insiyur dan Ilmuwan. Edisi ke-4.* Bandung: ITB.

GLOSARIUM

A

Aksioma	:	Suatu pernyataan yang bisa dilihat kebenarannya tanpa perlu adanya bukti. Sifat-sifat dasar yang darinya semua sifat lain dapat diturunkan.
Angka	:	Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan

B

Bilangan	:	suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran
Binomial	:	suku banyak yang memiliki dua suku, seperti 2x + 5y.

D

Definisi	:	perjanjian atau batasan mengenai sesuatu (misalnya, suatu lambang atau sekelompok kata) sebagai pengganti suatu hal lain, biasanya beberapa uangkapan yang tidak terlalu panjang agar dapat ditulis dengan mudah atau sederhana
Derajat	:	1. satuan ukuran sudut; 2. satuan ukuran suhu; 3. Kadang-kadang digunakan sebagai skala dalam aritmetika.
Diskrit	:	Tidak saling berhubungan
Distribusi peluang	:	Peluang-peluang yang mungkin terjadi dalam satu kejadian

E

Ekspansi	:	Perluasan, penjabaran suatu bentu matematika
Ekspektasi	:	Harapan
Eksperimen	:	Percobaan
Eksponen	:	Bilangan yang ditempatkan di kanan atas suatu simbol.
Elementer	:	Berkenaan dng unsur atau elemen; permulaan atau tingkat pertama atau dasar (tt pengetahuan, pelajaran); sangat awal.

F

Formula	:	rumus, jawaban umum, atran, atau prinsip yang dinyatakan dalam

bahasa matematika.

Frekuensi : (untuk koleksi data) banyaknya objek dalam suatu kategori.

Fungsi : pemetaan tepat satu objek dari satu himpunan (daerah nilai) dengan setiap objek dari himpunan lain (daerah asal atau domain)

G

Gabungan : suatu himpunan yang setiap unsurnya sekurang-kurangnya terletak dalam salah satu himpunan yang telah diketahui.

H

Himpunan : kumpulan benda-benda atau objek yang nyata ataupun abstrak yang dapat didefinisikan secara jelas.

Himpunan penyelesaian : himpunan semua penyelesaian suatu persamaan, sistem persamaan, pertaksamaan tertentu; dan sebagainya.

K

Kejadian : suatu himpunan bagian dari ruang sampel.

Koefisien : (dalam aljabar dasar) bagian suatu suku yang berupa bilangan atau konstanta, biasanya dituliskan sebelum lambang peubah, seperti 2 dalam 2x atau 2 (x + y).

Konsep : ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep atau bukan

Konstanta : variabel yang hanya memiliki suatu nilai tetapan

Kontinu : berkesinambungan; berkelanjutan; terus-menerus

Kumulaif : Sesuatu yang sifatnya penggabungan, penumpukan, aau penambahan dari bagian-bagian.

P

Pangkat : Bilangan yang ditempatkan di kanan atas suatu simbol.

Parameter : Digunakan sebagai pembeda antara persamaan yag sejenis dan bukan jenisnya

Peluang : cara untuk mengungkapkan pengetahuan atau kepercayaan bahwa

		suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi
Percobaan	:	suatu kegiatan yang dapat memberikan beberapa kemungkinan.
Persekutuan	:	bilangan yang menjadi kelipatan dari dua atau lebih bilangan
Populasi	:	sekelompok orang, benda, atau hal yang menjadi sumber pengambilan sampel; suatu kumpulan yang memenuhi syarat tertentu yang berkaitan dengan masalah penelitian
Probabilitas	:	suatu kejadian dalam suatu percobaan (acak) merupakan batas frekuensi relatif dari kejadian rintisan yang cukup banyak.
Prosedur	:	langkah atau urutan atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan tugas-tugas matematika

S

Saling asing	:	Jika kejadian tersebut tidak dapat terjadi secara bersamaan
Saling bebas	:	Jika kejadian A tidak mempengarui terjadinya kejadian B, begitu pun sebaliknya.
Sampel	:	perwakilan dari populasi yang hasilnya mewakili keseluruhan gejala yang diamati.
Segitiga pascal	:	adalah suatu aturan geometri pada koefisien binomial dalam sebuah segitiga
Statistik	:	kumpulan data dalam bentuk angka maupun bukan angka yang disusun dalam bentuk tabel (daftar) dan atau diagram yang menggambarkan atau berkaitan dengan suatu masalah tertentu.
Statistika	:	ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data
Suku	:	dalam ungkapan yang berbentuk jumlah beberapa besaran, masing-masing besaran disebut suku ungkapan itu.
Syarat	:	asumsi atau kebenaran matematika yang cukup untuk menjamin kebenara suatu pernyataan, atau sesuatu yag harus benar jika pernyataan ini benar.

T

Teorema	:	kesimpulan umum yang dikemukakan untuk dibuktikan berdasarkan hipotesis atau pemisahan tertentu yang diberikan.

V

Variabel	:	lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas.
Varians	:	ukuran seberapa jauh sebuah kumpulan bilangan tersebar.

INDEX

BIODATA PENULIS

Nur Fitriyah Indraswari, M.Pd.
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
STKIP PGRI Sumenep

Nur Fitriyah Indraswari merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Pamekasan Madura, pada tanggal 18 April 1992. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Nur Kholish dengan Ibu Siti Nurhayati. Penulis menempuh jenjang sekolah dasar di SDN Jungcangcang 1 tahun 1998 sampai 2004. Kemudian melanjutkan di SMP Negeri 1 Pamekasan dan lulus tahun 2007. Masih di kota yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 1 Pamekasan dari 2007 sampai 2010.

Pada jenjang Strata 1, penulis menempuh pendidikan di Universitas Madura dan lulus tahun 2014. Tahun 2015, penulis melanjutkan pendidikan Strata 2 di Universitas Surabaya dengan jurusan yang sama yaitu pendidikan matematika dan lulus tahun 2017. Setelah lulus, awal tahun 2018 penulis bergabung ke STKIP PGRI Sumenep sebagai dosen tetap di prodi pendidikan matematika sampai saat ini.