



SEKOLAH TINGGI KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PERSATUAN GURU REPUBLIK INDONESIA
STKIP PGRI SUMENEP

Website : www.stkippgriumenep.ac.id

Jl. Trunojoyo Gedung Sumenep Telp. (0328) 664094 – 671732 Fax. 671732

**SURAT PERNYATAAN PENGECEKAN
SIMILARITY ATAU ORIGINALITY**

Yang bertanda tangan di bawah ini atas nama ketua STKIP PGRI Sumenep, menyatakan dengan sebenarnya bahwa karya ilmiah yang diajukan sebagai bahan penilaian penetapan angka kredit dan kenaikan jabatan fungsional akademik ke Asisten Ahli atas nama:

Nama : Fitriana Minggani, S.Si., M.Si.

NIDN : 0731058702

Tempat, tanggal lahir : Sumenep, 31 Mei 1987

Program Studi : Pendidikan Matematika

Telah dilakukan pengecekan *similarity* dengan menggunakan aplikasi Turnitin dengan Keterangan sebagai berikut.

No	Judul	Hasil
1	Analisis Solusi Model Rangkaian Listrik Menggunakan Metode Transformasi <i>Laplace</i> Modifikasi	15 %

Demikian surat ini saya buat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Sumenep, 21 Mei 2020

Wakil Ketua Bid. Akademik,



Dr. Jamilah, M.Ag

ANALISIS SOLUSI MODEL RANGKAIAN LISTRIK MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI LAPLACE MODIFIKASI

by Fitriana Minggani

Submission date: 30-Jan-2020 12:11PM (UTC+0700)

Submission ID: 1248602783

File name: plagiasi_Fitriana_Minggani,S.Si,M.Si._Pendidikan_Matematika.pdf (733.9K)

Word count: 2782

Character count: 14850

ANALISIS SOLUSI MODEL RANGKAIAN LISTRIK MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI LAPLACE MODIFIKASI

Fitriana Minggani

Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Sumenep
mathgyz12@gmail.com

Abstrak

Transformasi *Laplace* merupakan salah satu jenis transformasi integral yang memungkinkan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua homogen maupun non homogen. Transformasi *Laplace* Modifikasi diperoleh dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada persamaan Transformasi *Laplace* yang dinyatakan dalam bentuk $\mathcal{L}_M\{q(t)\} = q(s) = \sqrt{s} \int_0^\infty e^{-st} q(t) dt$ dengan $t > 0$ dan e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi untuk $s \in \mathbb{R}^+$. Penyelesaian persamaan diferensial sering terkendala oleh masalah nilai awal atau nilai batas. Masalah nilai batas ini sering dijumpai pada penerapan persamaan diferensial, salah satunya adalah model rangkaian listrik.

Paper ini bertujuan untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial linear pada model rangkaian listrik sederhana (RLC) yang dihubungkan secara seri, dengan menggunakan transformasi *Laplace* modifikasi. Hasil penelitian ini memberikan solusi persamaan diferensial linear orde dua yang berbentuk:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \cdot \left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L} (R + E_0 \sin \omega t) \right)$$

Kata kunci: persamaan diferensial linear orde dua, rangkaian listrik, transformasi *Laplace* modifikasi

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang digunakan secara luas dalam berbagai bidang kehidupan, termasuk dalam menyelesaikan permasalahan di bidang teknik, fisika, ekonomi, biologi, dan yang lainnya. Permasalahan pada bidang tersebut kemudian diidentifikasi, dirumuskan dan dimodelkan untuk dapat ditentukan solusinya. Adapun pemodelan yang menggunakan simbol matematika dan logika untuk menyajikan permasalahan objek disebut pemodelan matematika atau pemodelan simbolik[3]. Tujuan dari pemodelan matematika adalah untuk memberikan deskripsi terkait keadaan, sifat, maupun perilaku objek agar mudah dikenali, dipelajari maupun dimanipulasi[3]. Hal yang perlu dilakukan saat menyusun model matematika pada suatu permasalahan adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat, memberi lambang pada semua besaran, menentukan besaran konstanta dan variabel, menentukan hubungan variabel dan konstanta sehingga terbentuk model matematika, mencari penyelesaian berdasarkan teori-teori dalam matematika, dan menginterpretasikan solusi model sehingga diperoleh solusi permasalahan.

Metode transformasi *Laplace* merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, yang memecahkan masalah nilai awal dalam suatu persamaan aljabar atau sistem persamaan yang dapat diselesaikan dengan metode aljabar dan tabel transformasi *Laplace*[1]. Sebenarnya sebelum ditemukan transformasi *Laplace*, suatu transformasi integral dimulai dengan munculnya transformasi *Fourier* yang kemudian diikuti oleh transformasi *Laplace* pada tahun 1822 yang merupakan turunan dari transformasi *Fourier*[6]. Namun, tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace*.

Pada persamaan diferensial biasa dengan koefisien variabel untuk masalah nilai awal dan nilai batas, terdapat beberapa persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace*. Sejalan dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Yusnanda,dkk, yaitu melakukan modifikasi pada transformasi *Laplace* yang dinamakan transformasi *Laplace* modifikasi, dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada

persamaan Transformasi Laplace yang dinyatakan dalam bentuk $\mathcal{L}_M\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ dengan $t > 0$ dan e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi untuk $s \in \mathbb{R}^+$ [6].

Rangkaian listrik merupakan kumpulan elemen atau komponen listrik yang saling dihubungkan dengan cara-cara tertentu yang paling sedikit mempunyai satu lintasan tertutup. Suatu rangkaian listrik dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan [1]. Elemen rangkaian listrik dapat dikelompokkan menjadi elemen atau komponen aktif dan pasif. Elemen aktif adalah elemen yang menghasilkan energi, dalam hal ini adalah sumber tegangan dan sumber arus. Sedangkan elemen pasif adalah elemen yang tidak menghasilkan energi, yaitu elemen yang hanya dapat menyerap energi (resistor), elemen yang dapat menyimpan energi (induktor) dan elemen yang dapat menyerap energi dalam bentuk medan magnet (kapasitor) [1].

Model persamaan rangkaian listrik sederhana yang berbentuk persamaan diferensial linear orde dua non homogen ini, akan nampak rumit apabila diselesaikan dengan metode aljabar biasa. Oleh karena itu, pada paper ini akan diterapkan transformasi Laplace modifikasi untuk mendapatkan solusi umum persamaan diferensial tersebut. Suatu model rangkaian listrik ini akan dapat dianalisis atau diselesaikan menggunakan metode transformasi Laplace modifikasi, disebabkan oleh karakteristik dari tiap-tiap elemen rangkaian listrik yang berbeda, meskipun secara definitif V_R, V_L dan V_C merupakan besarnya arus yang mengalir pada elemen R, L dan C .

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dapat digunakan untuk mereduksi persamaan diferensial ke suatu masalah aljabar. Aljabar tersebut dapat menjadi rumit pada suatu kejadian, tetapi sebenarnya dalam beberapa kasus ini akan lebih sederhana daripada penyelesaian persamaan diferensial secara langsung [4]. Transformasi Laplace secara umum didefinisikan oleh:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

dengan $t > 0$, $\mathcal{L}$ dinamakan operator transformasi Laplace, selanjutnya e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi dalam $s \in \mathbb{R}^+$ [3,4].

Terdapat beberapa sifat penting yang dapat digunakan untuk menentukan Transformasi Laplace beberapa fungsi, antara lain:

2.1.2. [4] Sifat Linear

Untuk konstanta c_1 dan c_2 mempunyai

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (2)$$

2.1.3. [4] Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

dengan $f^{(r)}(0)$ merupakan nilai dari $f^{(r)}(t)$ pada $t = 0, r = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ dan n bilangan bulat positif.

Salah satu keunggulan transformasi laplace dalam menyelesaikan suatu masalah nilai awal, dapat secara langsung artinya bahwa masalah nilai awal dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu harus menentukan solusi umumnya atau persamaan-persamaan non homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogenya.

2.2. Transformasi Laplace Modifikasi [6]

Transformasi Laplace secara umum dapat ditulis sebagai $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ seperti pada persamaan (1).

Jika persamaan (1) dikalikan dengan $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ \sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \sqrt{s} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ \sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}_M\{f(t)\}\end{aligned}\quad (4)$$

Notasi $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ merupakan Transformasi *Laplace* modifikasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}_M\{f(t)\} = \sqrt{s} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5)$$

Transformasi *Laplace* modifikasi memiliki sifat-sifat seperti operator linear, sifat diferensial, sifat integral, sifat translasi pertama, sifat translasi kedua, sifat konvolusi, dan sifat nilai awal.

2.3. Invers Transformasi *Laplace* Modifikasi

Jika transformasi *laplace* modifikasi [6] dari fungsi $f(t)$ adalah $T(s)$ atau $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ maka fungsi adalah invers transformasi *laplace* modifikasi dari $T(s)$ dan disimbolkan dengan $\mathcal{L}_M^{-1}\{T(s)\}$. Notasi $\mathcal{L}_M^{-1}$ merupakan notasi invers dari notasi transformasi *laplace* modifikasi. Hubungan antara fungsi $f(t)$ dan $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ dapat dilihat pada tabel

Tabel 1. Transformasi *Laplace* Modifikasi pada beberapa fungsi

No.	$f(t)$	$\mathcal{L}_M\{f(t)\}$
1.	1	$s^{-\frac{1}{2}}$
2.	t	$s^{-\frac{3}{2}}$
3.	t^n	$n!s^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$
4.	e^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{s-a}$
5.	te^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{(s-a)^2}$
6.	$\sin at$	$\frac{a\sqrt{s}}{s^2+a^2}$
7.	$\cos at$	$\frac{s\sqrt{s}}{s^2+a^2}$

2.4. Nilai Awal dan Nilai Akhir

Sifat transformasi *Laplace* modifikasi berkenaan dengan nilai awal dan nilai akhir, dapat dinyatakan sebagai berikut [5]:

$$\text{Nilai awal} : \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s}F(s)$$

$$\text{Nilai akhir} : \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s}F(s)$$

Jadi, nilai $f(t)$ pada $t = 0^+$ di kawasan waktu (nilai awal) sama dengan nilai $\sqrt{s}F(s)$ pada tak hingga di kawasan s . Sedangkan nilai $f(t)$ pada $t = \infty$ (nilai akhir) sama dengan nilai $\sqrt{s}F(s)$ pada titik asal di kawasan s . Sifat ini dapat diturunkan dari sifat diferensiasi.

2.5. Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat fungsi yang tidak diketahui dan derivatifnya. Persamaan diferensial ditinjau dari banyaknya variabel bebas dari fungsi yang tidak diketahui, dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui adalah fungsi dari satu variabel bebas. Sedangkan, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat derivatif parsial fungsi yang tidak diketahui terhadap dua atau lebih variabel bebas[4]. Untuk orde dari persamaan diferensial ditunjukkan oleh derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut[2].

Selain itu, persamaan diferensial juga dikelompokkan menjadi persamaan linear dan nonlinear. Persamaan diferensial biasa yang dinyatakan ke dalam bentuk $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ merupakan linear jika F merupakan fungsi linear dari variabel-variabel $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ [4]. Definisi tersebut juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial linear orde- n dengan koefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk umum[3]:

$$a_n(t) \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = R(t)$$

atau $a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = R(t)$ (6)

dimana $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$

Berdasarkan persamaan (6) sehingga persamaan diferensial linear orde dua non homogen dengan koefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = R(t) \quad (7)$$

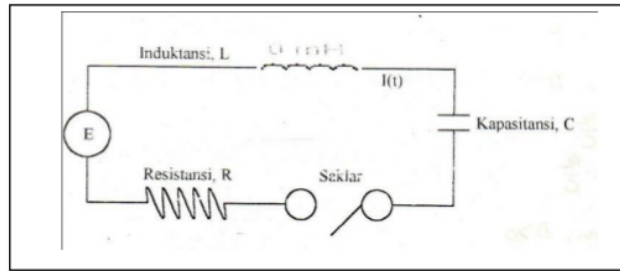
dengan $a_2 \neq 0$, a_0 dan a_1 adalah konstanta real

2.6. Rangkaian Listrik Sederhana (RLC Seri)

Rangkaian listrik sederhana terdiri atas tahanan/ hambatan R , satuannya Ohm; sebuah kapasitor C , satuannya Farad; sebuah induktor L , satuannya Henry; dan gaya elektromotif emf $E(t)$, satuannya Volt. Sebuah baterai atau generator sebagai sumber listrik, yang dihubungkan secara seri. Arus I yang mengalir melalui rangkaian tersebut diukur dalam Ampere dan muatan pada kapasitor, yang satuannya Coulomb[4].

Hukum Loop **Kirchoff** berbunyi “ jumlah aljabar dari penurunan tegangan dalam sebuah rangkaian listrik tertutup sederhana adalah nol”.

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 1. Rangkaian Listrik RLC Seri

Diketahui bahwa penurunan tegangan pada tahanan/ hambatan, kapasitor dan induktor masing-masing adalah RI , $\left(\frac{1}{C}\right)q$, dan $L\left(\frac{dI}{dt}\right)$, dengan q merupakan muatan atau kapasitas dari kapasitor dalam waktu t . Penurunan tegangan dalam *emf* (electromotive force) adalah $-E(t)$. Jadi, dari hukum Loop Kirchoff, dimiliki:

$$\begin{aligned}\sum V + (-E(t)) &= 0 \\ V_R + V_L + V_C - E(t) &= 0 \\ RI + L\left(\frac{dI}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q - E(t) &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

Arus dalam circuit berhubungan dengan perubahan muatan atau kapasitas yang berada dalam kapasitor, sehingga hubungan antara q dan I adalah

$$I = \frac{dq}{dt}, \text{ kemudian } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad (9)$$

Substitusikan persamaan (9) ke (8), diperoleh

$$\begin{aligned}R\left(\frac{dq}{dt}\right) + L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q - E(t) &= 0 \\ L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q &= E(t)\end{aligned}$$

Kalikan masing-masing ruas dengan $\left(\frac{1}{L}\right)$, menjadi

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E(t)$$

Karena $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ dan E_0 konstan, sehingga

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E_0 \sin(\omega t) \quad (10)$$

Kondisi-kondisi awal dari q , adalah

$$q(0) = q_0 ; \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I(0) = I_0 \quad (11)$$

3. METODOLOGI PENELITIAN

Adapun langkah-langkah pada penelitian ini, sebagai berikut:

- Mempelajari buku dan jurnal yang berhubungan dengan metode transformasi *Laplace* dan model rangkaian listrik RLC sederhana;
- Membuat pemodelan dari suatu rangkaian listrik RLC seri ke dalam bentuk persamaan diferensial orde dua non homogen, dengan menggunakan hukum Kirchhoff;
- Mempelajari sifat-sifat dan bentuk umum dari transformasi *Laplace*, dilanjutkan dengan sifat-sifat dan bentuk umum dari transformasi *Laplace* modifikasi;
- Ambil transformasi *Laplace* modifikasi pada kedua ruas persamaan yang terbentuk;
- Mensubstitusikan permisalan nilai awal yang diberikan, kemudian menyusun persamaan pembantu;
- Melakukan invers transformasi *Laplace* modifikasi dengan membaca tabel;
- Menarik kesimpulan berupa solusi umum penyelesaian dari transformasi *Laplace* modifikasi terhadap model rangkaian listrik RLC sederhana yang dirangkai seri.

4. PEMBAHASAN

Berdasarkan persamaan (13), osilasi sistem gerak pegas tanpa redaman yang dikenai gaya luar tersebut berupa persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen. Selanjutnya akan diberikan syarat awal yang harus dipenuhi sehingga tidak dapat diselesaikan secara langsung maupun dengan metode transformasi *Laplace* seperti biasa. Oleh karenanya akan digunakan transformasi *Laplace* modifikasi. Syarat awal tersebut merupakan saat osilasi pegas berada pada simpangan tertentu dengan kecepatan awal nol.

Jika diberikan syarat awal $q(0) = A$, $q'(0) = B = 0$, dan $\mathcal{L}_M\{q\} = q(s)$, maka dengan menggunakan transformasi *Laplace* modifikasi pada kedua ruas dari persamaan (10), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_M\left\{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \left(\frac{1}{LC}\right)q\right\} &= \mathcal{L}_M\left\{\frac{1}{L}E_0 \sin(\omega t)\right\} \\
 \mathcal{L}_M\{\ddot{q}\} + \frac{R}{L}\mathcal{L}_M\{\dot{q}\} + \frac{1}{LC}\mathcal{L}_M\{q\} &= \frac{1}{L}E_0\mathcal{L}_M\{\sin \omega t\} \\
 [s^2\mathcal{L}_M(q) - s\sqrt{s}q(0) - \sqrt{s}q'(0)] + \frac{R}{L}[s\mathcal{L}_M(q) - \sqrt{s}q(0) - \sqrt{s}q'(0)] + \left(\frac{1}{LC}\right)q(s) &= \frac{1}{L}E_0\mathcal{L}_M\{\sin \omega t\} \\
 [s^2q(s) - s\sqrt{s}A - \sqrt{s}B] + \frac{R}{L}[sq(s) - \sqrt{s}A] + \left(\frac{1}{LC}\right)q(s) &= \frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}\right) \\
 s^2q(s) + \frac{R}{L}sq(s) + \left(\frac{1}{LC}\right)q(s) &= As\sqrt{s} + \frac{R}{L}A\sqrt{s} + B\sqrt{s} + \frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}\right) \\
 \text{karena } B = 0, \text{ sehingga} \\
 q(s)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) &= As\sqrt{s} + \frac{R}{L}A\sqrt{s} + \frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}\right) \\
 q(s) &= \frac{As\sqrt{s} + \frac{R}{L}A\sqrt{s} + \frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}\right)}{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai $q(s)$, pada persamaan (12) bagian penyebutnya dapat digunakan bentuk kuadrat sempurna, yaitu

$$\left(s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}\right) = \left[s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left(s + \frac{R}{2L} \right)^2 + \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \right]^2 \\
&= \left(s + \frac{R}{2L} \right)^2 + \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \right]^2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \cdot \left[\left(s + \frac{R}{2L} \right)^2 + \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \right]^2 \right]}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}}
\end{aligned}$$

dengan memisalkan $a = \left(\frac{R}{2L} \right)$ dan $b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}$, maka:

$$\left(s^2 + \left(\frac{R}{L} \right) s + \frac{1}{LC} \right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \cdot [(s+a)^2 + b^2]}{b} \quad (13)$$

Kemudian substitusikan persamaan (13) ke persamaan (12)

$$\begin{aligned}
q(s) &= \frac{As\sqrt{s} + \frac{R}{L} A\sqrt{s} + \frac{1}{L} E_0 \left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \cdot [(s+a)^2 + b^2]} \quad \text{atau} \\
q(s) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \cdot \frac{As\sqrt{s} + \frac{R}{L} A\sqrt{s} + \frac{1}{L} E_0 \left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2} \right)}{[(s+a)^2 + b^2]} \cdot b \\
q(s) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \cdot \left[A \frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{R}{L} \frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{E_0}{L} \left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right) \cdot \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \right] \\
q(s) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \cdot \left[A \frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{R}{L} \frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{1}{L} \left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right) \cdot \left(R + E_0 \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \right) \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan bentuk sederhana dari fungsi hasil transformasi, kemudian persamaan (14) ditransformasikan dengan invers transformasi *Laplace* modifikasi sehingga diperoleh solusi dari persamaan diferensial yang diberikan:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \cdot \mathcal{L}_M^{-1} \left\{ A \left(\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right) + \frac{R}{L} \left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right) \cdot \left(R + E_0 \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \right) \right\} \\
\mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}} \cdot \left[A \mathcal{L}_M^{-1} \left\{ \frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right\} + \frac{R}{L} \mathcal{L}_M^{-1} \left\{ \frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right\} + \frac{1}{L} \mathcal{L}_M^{-1} \left\{ \frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2 + b^2} \right\} \cdot \left(R + E_0 \mathcal{L}_M^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \right) \right]
\end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 1., didapatkan

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(Ate^{-at} \sin bt + \frac{R}{L}e^{-at} \sin bt + \frac{1}{L}e^{-at} \sin bt \cdot (R + E_0 \sin \omega t) \right)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot (e^{-at} \sin bt) \left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L} \cdot (R + E_0 \sin \omega t) \right)$$

Kemudian substitusikan kembali nilai a dan b

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \cdot \left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L} (R + E_0 \sin \omega t) \right)$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang berkaitan dengan penerapan transformasi *Laplace* modifikasi pada permasalahan model matematika untuk menentukan solusi model rangkaian listrik sederhana RLC yang disusun secara seri. Model matematika yang terjadi berupa persamaan diferensial linear orde dua non homogen dengan koefisien konstan. Untuk menyelesaikannya, terlebih dahulu dianalisis komponen-komponen yang bekerja pada sistem rangkaian listrik sederhana RLC yang disusun secara seri, kemudian ditentukan suatu nilai awalnya. Bentuk umum persamaannya adalah $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E_0 \sin(\omega t)$

Ambil transformasi *Laplace* modifikasi dari persamaan diferensial dan gunakan syarat awalnya sehingga terbentuk $\mathcal{L}_M\{q\} = q(s)$. Selanjutnya, digunakan invers transformasi *Laplace* modifikasi dari $q(s)$ sehingga terbentuk $q(t) = \mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\}$. Akibatnya, solusi persamaan rangkaian listrik sederhana RLC yang disusun secara seri, diperoleh:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \cdot \left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L} (R + E_0 \sin \omega t) \right)$$

REFERENSI

- [1] Arifin, Muhammad W.M., dan Sugiyanto, 2013, *Aplikasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik*,
- [2] Boyce, W.E, Di Prima R.C., 2012, *Elementary Differential Equations Tenth Edition*. New York: Wiley and Sons
- [3] Maharani, R., 2017, *Aplikasi Transformasi Laplace Pada Persamaan Diferensial Orde Dua Untuk Pendulum Sederhana dan Pendulum Fisis*, Jurnal Konstanta, Vol 1 No. 1, Juli-Desember
- [4] Nugroho, D.B., 2011, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- [5] Sudirham, S., 2013, *Analisis Rangkaian Listrik Jilid 2*, Bandung: Darpublic.
- [6] Yusnanda, Helmi, dan Yudhi, 2019, *Transformasi Laplace Modifikasi untuk Menyelesaikan Beberapa Persaman Diferensial Biasa Linear*, Buletin Ilmiah Mat-Stat, dan Penerapannya (Bimaster), Vol 8: 53-62

ANALISIS SOLUSI MODEL RANGKAIAN LISTRIK MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI LAPLACE MODIFIKASI

ORIGINALITY REPORT

15%

SIMILARITY INDEX

15%

INTERNET SOURCES

0%

PUBLICATIONS

3%

STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

7%

★ media.neliti.com

Internet Source

Exclude quotes On

Exclude bibliography On

Exclude matches < 2%